ETH zürich

Grundlagen

Polynomdivision

Meike Akveld

Wie funktioniert noch mal die schriftliche Division?

Was ist $3597 : 11$?

$$
\begin{array}{l}
3597 : 11 = 327 \\
\underline{33} \\
29 \\
\underline{22} \\
77 \\
\underline{77} \\
0
\end{array}
$$

Polynomdivision: Beispiel 1

Löse $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$!

Man "sieht" $1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 1 - 4 - 7 + 10 = 0.$

Das heisst, dass $(x - 1)$ ein Faktor von $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ ist,

oder auch dass

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 1) \cdot \textit{Irgendetwas}.$$

Also, wie bestimmen wir das *Irgendetwas* $= (x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x - 1)$?

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 4x^2 - 7x + 10\right) : (x - 1) = x^2 - 3x - 10 \\
\underline{x^3 - 1x^2} \\
\quad\; - 3x^2 \\
\quad\; \underline{-3x^2 + 3x} \\
\qquad\quad - 10x \\
\qquad\quad \underline{-10x + 10} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Und somit gilt:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 10)$$

Und somit gilt:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 10) = (x - 1) \cdot (x - 5) \cdot (x + 2).$$

Die Nullstellen sind $x_1 = 1, x_2 = 5$ und $x_3 = -2$.

Polynomdivision: Beispiel 2

Bestimmen Sie die Nullstellen von $x^3 - x^2 - x - 2$.

$x_1 = 2$ (da $2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$.)

Wir müssen also $x^3 - x^2 - x - 2$ durch $x - 2$ teilen.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 1x^2 - 1x - 2) : (x - 2) = x^2 + x + 1 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad\quad x^2 \\
\quad\quad \underline{x^2 - 2x} \\
\quad\quad\quad\quad x \\
\quad\quad\quad\quad \underline{x - 2} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Also $(x^3 - 1x^2 - 1x - 2) : (x - 2) = x^2 + x + 1$

oder auch

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Somit hat der Term $x^3 - x^2 - x - 2$ nur eine (reelle) Nullstelle, nämlich $x_1 = 2$.

Polynomdivision: Beispiel 3

Zerlegen Sie das Polynom $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ in Linearfaktoren.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6\right) : (x-1) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\
\underline{x^4 - x^3} \\
\qquad - 2x^3 \\
\qquad \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
\qquad\qquad\quad - 5x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-5x^2 + 5x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Polynomdivision: Beispiel 4

Vereinfache den folgenden Ausdruck mit Hilfe der Polynomdivision:

$$\frac{x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}.$$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^5 + 1x^4 - 4x^3 + x^2 - 1x - 2\right) : \left(x^2 - x - 1\right) = x^3 + 2x^2 - x + 2 \\
\underline{x^5 - 1x^4 - 1x^3} \\
\qquad 2x^4 - 3x^3 \\
\qquad \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad - x^3 + 3x^2 \\
\qquad\qquad \underline{-x^3 + 1x^2 + 1x} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 - 2x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2x^2 - 2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Schlussbemerkungen:

- Weitere Nullstellen mit Polynomdivision zu bestimmen, geht *nur*, wenn man zuerst eine *einfache* Nullstellen *gesehen* hat.
- Auch wenn es keine einfache Nullstellen gibt, ist es oft sinnvoll, Polynomdivision zu machen – auch wenn dabei manchmal einen Rest bleibt.