ETH zürich

Grundlagen

Vollständige Induktion

Meike Akveld

Mathematische Aussagen I

Mathematische Aussagen I

$\mathcal{A}$: Die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck ist 180°.

$\mathcal{B}$: 1001 ist eine Primzahl.

Mathematische Aussagen I

$\mathcal{A}$: Die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck ist 180°. ✓

Mathematische Aussagen I

$\mathcal{A}$: Die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck ist 180°. ✓

$\mathcal{B}$: 1001 ist eine Primzahl. **FALSCH**

Mathematische Aussagen II

Mathematische Aussagen II

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\mathcal{B}(n): \quad 4 \mid 5^n + 7$$

Mathematische Aussagen II

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\mathcal{B}(n): \quad 4 \mid 5^n + 7$$

$\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7 \iff \mathcal{B}(1) : 12$ ist durch 4 teilbar.

Mathematische Aussagen II

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\mathcal{B}(n): \quad 4 \mid 5^n + 7$$

$\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7 \iff \mathcal{B}(1) : 12$ ist durch 4 teilbar. $\checkmark$

Mathematische Aussagen II

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\mathcal{B}(n): \quad 4 \mid 5^n + 7$$

$\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7 \iff \mathcal{B}(1) : 12$ ist durch 4 teilbar. ✓

$\mathcal{B}(2) : 4|5^2 + 7 \iff \mathcal{B}(1) : 25 + 7 = 32$ ist durch 4 teilbar.

Mathematische Aussagen II

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\mathcal{B}(n): \quad 4 \mid 5^n + 7$$

$\mathcal{B}(1): 4|5^1+7 \iff \mathcal{B}(1): 12$ ist durch 4 teilbar. ✓

$\mathcal{B}(2): 4|5^2+7 \iff \mathcal{B}(1): 25+7=32$ ist durch 4 teilbar. ✓

Beweis mittels vollständiger Induktion

Beweis mittels vollständiger Induktion

Gegeben: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Beweis mittels vollständiger Induktion

Gegeben: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Ziel: Zeigen, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis mittels vollständiger Induktion

Gegeben: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Ziel: Zeigen, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schritt I (**Verankerung**): Zeige, dass $\mathcal{A}(n_0)$ wahr ist für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Beweis mittels vollständiger Induktion

Gegeben: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Ziel: Zeigen, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schritt I (**Verankerung**): Zeige, dass $\mathcal{A}(n_0)$ wahr ist für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Schritt II (**Induktionsschritt**): Zeige, dass $\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1)$ für ein beliebiges $n \geq n_0$.

Beweis mittels vollständiger Induktion

Gegeben: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

Ziel: Zeigen, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Schritt I (**Verankerung**): Zeige, dass $\mathcal{A}(n_0)$ wahr ist für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Schritt II (**Induktionsschritt**): Zeige, dass $\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1)$ für ein beliebiges $n \geq n_0$.

QED

Beispiel 1

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n) : 4|5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n) : 4|5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Verankerung: $\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7$ (12 ist durch 4 teilbar.) ✓

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n) : 4|5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Verankerung: $\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7$ (12 ist durch 4 teilbar.) ✓

Induktionsschritt: Angenommen, $\underbrace{5^n + 7 \text{ ist durch 4 teilbar}}_{\text{Induktionsvoraussetung(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n) : 4|5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Verankerung: $\mathcal{B}(1) : 4|5^1 + 7$ (12 ist durch 4 teilbar.) ✓

Induktionsschritt: Angenommen, $\underbrace{5^n + 7 \text{ ist durch 4 teilbar}}_{\text{Induktionsvoraussetung(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7 = 5 \cdot \underbrace{(5^n + 7)}_{\text{(IV)}} - 35 + 7$$

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n) : 4 | 5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Verankerung: $\mathcal{B}(1) : 4 | 5^1 + 7$ (12 ist durch 4 teilbar.) ✓

Induktionsschritt: Angenommen, $\underbrace{5^n + 7 \text{ ist durch 4 teilbar}}_{\text{Induktionsvoraussetung(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot \underbrace{(5^n + 7)}_{\text{(IV)}} - 35 + 7$$

$$= 5 \cdot \underbrace{(5^n + 7)}_{\text{durch 4 teilbar}} - \underbrace{28}_{\text{durch 4 teilbar}}$$

Beispiel 1

Behauptung: $\mathcal{B}(n): 4|5^n + 7$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $5^n + 7$ ist immer durch 4 teilbar).

Verankerung: $\mathcal{B}(1): 4|5^1 + 7$ (12 ist durch 4 teilbar.) ✓

Induktionsschritt: Angenommen, $\underbrace{5^n + 7 \text{ ist durch 4 teilbar}}_{\text{Induktionsvoraussetung(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot \underbrace{(5^n + 7)}_{\text{(IV)}} - 35 + 7 \\ &= 5 \cdot \underbrace{(5^n + 7)}_{\text{durch 4 teilbar}} - \underbrace{28}_{\text{durch 4 teilbar}} \end{aligned}$$

Also $5^{n+1} + 7$ ist durch 4 teilbar. QED

Beispiel 2

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Verankerung: $\mathcal{A}(1) : \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Verankerung: $\mathcal{A}(1) : \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ ✓

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass $\underbrace{\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}_{\text{(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass $\underbrace{\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}_{\text{(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2\cdot(n+1)-1) \underbrace{=}_{\text{(IV)}} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Beispiel 2

Behauptung: $\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass $\underbrace{\mathcal{A}(n) : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}_{\text{(IV)}}$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2\cdot(n+1)-1) \underbrace{=}_{\text{(IV)}} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Und damit haben wir gezeigt, dass auch $\mathcal{A}(n+1)$ gilt, und somit ist die Behauptung bewiesen. QED