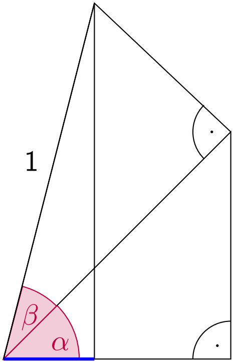
Trigonometrie

Anwendungen der Additionstheoreme

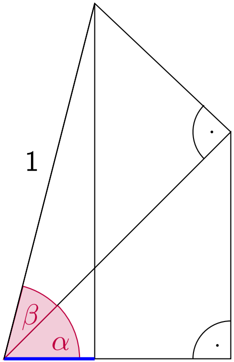
Meike Akveld

Weitere Additionstheoreme



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Weitere Additionstheoreme



Die blaue Strecke $= \cos(\alpha + \beta)$

Weitere Additionstheoreme

Satz (Additionstheoreme)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Weitere Additionstheoreme

Satz (Additionstheoreme)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos\beta} + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\sin(-\beta)}_{=-\sin\beta} \\ &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

Weitere Additionstheoreme

Satz (Additionstheoreme)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Satz (Weitere Additionstheoreme)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum ersten Mal

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum ersten Mal

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

Formeln für doppelte Winkel

Formeln für doppelte Winkel

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha + \alpha) &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\
&= 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Formeln für doppelte Winkel

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\alpha) &= \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)+\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\\
&= 2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\\
\cos(\alpha+\alpha) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\\
&= \underbrace{\cos^2(\alpha)}_{=1-\sin^2(\alpha)} - \sin^2(\alpha)\\
&= 1-2\sin^2(\alpha)\\
&= 2\cos^2(\alpha)-1
\end{aligned}$$

Formeln für doppelte Winkel

Satz (Formeln für doppelte Winkel)

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
&= 1 - 2\sin^2(\alpha) \\
&= 2\cos^2(\alpha) - 1
\end{aligned}$$

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum zweiten Mal

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum zweiten Mal

Was ist $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum zweiten Mal

Aus $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ folgt, wenn $\sin(\alpha) > 0$, dass

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}}$$

Anwendungen I: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ – zum zweiten Mal

$$\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{2\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Anwendungen II: $\displaystyle\int \cos^2(x)\,\mathsf{d}x$

Bestimme $\displaystyle\int \cos^2(x)\,\mathsf{d}x$

Anwendungen II: $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Es gilt $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \implies \cos^2(\alpha) = \dfrac{\cos(2\alpha)+1}{2}$

Anwendungen II: $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Es gilt $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \implies \cos^2(\alpha) = \dfrac{\cos(2\alpha)+1}{2}$

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{2}x + C$$