Das Beweisverfahren der Vollständigen Induktion

Armin P. Barth

ETH zürich

Bildquellenverzeichnis

1 https://texample.net/

Eine Problemstellung

Was ist eigentlich die erste Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit einem natürlichen Exponenten? Nun, wenden wir die Definition der Ableitung auf diese Funktion an, so erhalten wir zunächst

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$$

Es ist nicht sofort klar, wie wir den Bruch umbauen sollen, damit der Grenzwertprozess durchführbar wird. Die Schwierigkeit besteht offenbar darin, mit einer Differenz zweier n-ter Potenzen umzugehen. Und genau hierfür gibt es glücklicherweise einen Schlüssel, eine algebraische Hilfsformel nämlich, die dieses Problem für uns beseitigen wird. Dies ist die Hilfsformel:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + ... + a^1 b^{n-2} + b^{n-1}\right)}$$

Sie kennen bestimmt einen Spezialfall dieser Formel, nämlich den Fall $n = 2$. Dann lautet sie nämlich so: $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$, eine Ihnen sicher geläufige binomische Formel.

Unter Verwendung der Hilfsformel können wir in unserer Ableitung sofort Fortschritte machen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \to x} \frac{\cancel{(x_1 - x)} \cdot \left(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + ... + x_1^1 x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\cancel{x_1 - x}} \\ &= \lim_{x_1 \to x} \left(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + ... + x_1^1 x^{n-2} + x^{n-1}\right) \\ &= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} + x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Es bleibt das etwas ungute Gefühl zurück, dass wir diese Hilfsformel einfach glauben sollen, ohne sie irgendwie überprüft zu haben. Klar, wir kennen sie für den Fall $n = 2$, aber es ist nicht sofort klar, dass sie wirklich für *jedes* natürliche n gelten wird. Tatsächlich ist es ja nicht nur eine einzige Formel, sondern es sind unendlich viele Formeln, eine für jede natürliche Zahl. Wir behaupten, dass sie für jede einzelne natürliche Zahl zutrifft, für $n = 1$, für $n = 2$, für $n = 3$, und so weiter. Wie aber beweisen wir all diese unendlich vielen Formeln? Eins ist klar, wir können nicht die Formel der Reihe nach für $n = 1$, für $n = 2$, für $n = 3$, und so weiter beweisen, denn selbst in einem Menschenleben könnten wir immer nur endlich viele schaffen, und bei einer unendlich grossen Menge sind endlich viele einfach nur nichts. Es muss einen besseren, viel eleganteren Weg geben, eine Aussage zu beweisen, welche für jede natürliche Zahl gelten soll. Die *vollständige Induktion* ist dieser elegante Weg.

Vollständige Induktion

Beginnen wir mit dem Äusserlichsten: dem Begriff. Mathematikerinnen und Mathematiker unterscheiden zwischen *Induktion* und *Deduktion*. Beide Begriffe bezeichnen typische Vorgehensweisen beim mathematischen Schlussfolgern, und dennoch könnten sie gegensätzlicher nicht sein. Vereinfachend und prägnant gesagt:

- Eine **Deduktion** ist ein Schluss vom Allgemeinen aufs Spezielle.
- Eine **Induktion** ist ein Schluss vom Speziellen aufs Allgemeine.

Ein einfaches Beispiel soll dies transparenter machen: Wir wissen, dass (gemäss der Neunerregel) eine natürliche Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn es ihre Quersumme ist. Wir können aus diesem allgemeingültigen Faktum schliessen (*deduzieren*), dass die Zahl 234 durch 9 teilbar sein muss, denn ihre Quersumme ist das zweifellos. Und wir könnten diese Teilbarkeit für beliebig viele weitere konkrete spezielle Zahlen schliessen. Da wir immer von einer allgemein anerkannten, bewiesenen Aussage ausgehen, kann bei unserem Schlussfolgern nichts schief gehen. Diese Art des Schliessens nennt man *Deduktion*.

Ganz anders, wenn man vom Speziellen aufs Allgemeine schliesst. Wir könnten beobachten, dass bei all den durch 9 teilbaren Zahlen $45, 81, 234, 7704, 111111111, 876546$ die Quersumme auch durch 9 teilbar ist, und deswegen vermuten, dass das immer gelten dürfte. Der Schluss wäre natürlich gefährlich, denn man wäre nie ganz sicher, ob nicht vielleicht das nächste Zahlenbeispiel ein Gegenbeispiel liefern könnte, also eine durch 9 teilbare Zahl, deren Quersumme nicht durch 9 teilbar ist. Dennoch, das (gefährliche) Schliessen von einzelnen Beispielen auf allgemeine Aussagen ist häufig und wird als *induktives Schliessen* bezeichnet. Es gilt aber *nicht* als Beweis, das muss hier in aller Deutlichkeit festgehalten werden!

Eine Induktion kann nur dann beweisende Kraft haben, wenn *sämtliche* möglichen konkreten speziellen Beispiele geprüft wurden, aber das ist bei unendlich grossen Mengen ein schwieriges Unterfangen.

Die *Vollständige Induktion* vermag genau das: Sie prüft alle unendlich vielen speziellen Beispiele in kurzer Zeit. Für ganz spezielle Typen von Aussagen (auf die wir gleich eingehen werden) leistet sie eine „Turbo-Induktion“. Eine äusserst elegante Idee kürzt das unendlich lange dauernde Überprüfen aller möglichen Beispiele auf (im Wesentlichen) zwei Tests ab. Daher auch die Präzisierung „vollständig“: Eine gewöhnliche Induktion ist ein Wagnis, die *vollständige Induktion* aber leistet einen mathematisch absolut sauberen Beweis.

Ein illustratives Beispiel soll die Idee deutlich machen: Angenommen, ich zeige Ihnen eine grosse Tasche und gebe Ihnen die folgenden Hinweise zu deren Inhalt:

1. Die Tasche enthält nummerierte Kugeln.
2. Die Tasche enthält die Kugel mit der Nummer 1.
3. Falls die Tasche die Kugel mit der Nummer n enthält, dann enthält sie ganz sicher auch die Kugel mit der Nummer $n + 1$.

Was wissen Sie nun über den Inhalt meiner Tasche? Kugel 1 ist sicherlich darin wegen Punkt 2. Da Kugel 1 darin ist, ist auch Kugel 2 darin, das ergibt sich unmittelbar aus Punkt 3 für $n = 1$. Da Kugel 2 darin ist, ist auch Kugel 3 darin, das ergibt sich unmittelbar aus Punkt 3 für $n = 2$. Da Kugel 3 darin ist,

ist auch Kugel 4 darin, das ergibt sich unmittelbar aus Punkt 3 für $n = 3$. Und so weiter. Kurzum: Jede natürliche Zahl muss in der Tasche vorkommen.

Wie oben angesprochen eignet sich das Beweisverfahren der Vollständigen Induktion nur für ganz spezielle Typen von Aussagen. Der Satz von Pythagoras könnte damit beispielsweise nicht bewiesen werden. Die Aussage muss die folgende Gestalt haben: *„Für jede natürliche Zahl n gilt, dass ...“*

Beispiele solcher Aussagen sind etwa:

- Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- Für jede natürliche Zahl n gilt: $a^n - b^n = (a - b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + ... + a^1b^{n-2} + b^{n-1}\right)$
- Für jede natürliche Zahl n gilt, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2 ist.
- Jede gerade natürliche Zahl grösser als 4 kann als Summe von zwei ungeraden Primzahlen geschrieben werden.

Entscheidend ist also, dass eine bestimmte Eigenschaft *für alle natürlichen Zahlen* behauptet wird. Dann ist die Vollständige Induktion ein beeindruckend kraftvolles Beweisinstrument. Sie schafft es, die Behauptung für *alle* Zahlen zu prüfen, ohne einfach eine Zahl nach der anderen einzusetzen. Wie ist das möglich?

Nun, das Beweisverfahren prüft,

1. ob die Zahl 1 (oder welche natürliche Zahl auch immer die kleinste sinnvolle sein mag) die behauptete Eigenschaft hat - und
2. ob die Zahl $n + 1$ die verlangte Eigenschaft hat unter der Voraussetzung, dass die Zahl n sie hat.

Nennen wir die behauptete Aussage $A(n)$, so versucht die Vollständige Induktion also nachzuweisen, dass $A(1)$ gilt und dass $A(n) \implies A(n+1)$. Wenn das gelingt, so erfüllt offenbar die Zahl 1 die behauptete Eigenschaft (weil ja A(1) bewiesen wurde) und aber auch die Zahl 2, weil ja bewiesen wurde, dass, falls die Eigenschaft für *irgendeine* Zahl gilt, sie auch für die nächstgrössere Zahl gilt. Dann erfüllt aber auch die Zahl 3 die behauptete Eigenschaft aus demselben Grund, und die Zahl 4 tut es auch, und die Zahl 5, und so weiter, und so fort.

Vergleicht man die Vollständige Induktion mit einer unendlich grossen (!) Domino-Competition, so stellt das Beweisverfahren leicht alle Domino-Rekorde in den Schatten: Stellt man sich nämlich vor, dass unendlich viele Dominosteine aneinandergereiht sind und zwar so, dass der erste Stein fällt und dass, wenn immer *irgendein* Stein fällt, auch der unmittelbar nächste fällt, so wird klar, dass unendlich viele Steine fallen müssen. Jeder fallende Stein bedeutet das Zutreffen der behaupteten Eigenschaft auf eine bestimmte natürliche Zahl, und daher trifft dann die Eigenschaft auf alle natürlichen Zahlen zu. Die Steine müssen also nicht alle einzeln und der Reihe nach fallen, damit wir überzeugt sind; es muss nur klar sein, dass die Steine

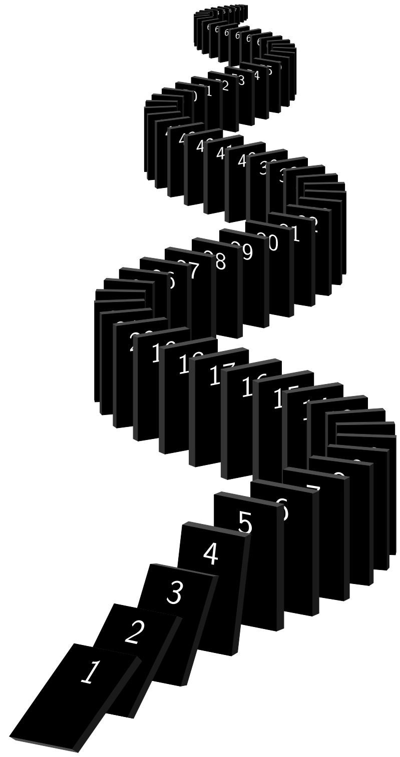

Abbildung 1: Fallende Dominosteine

so zueinander stehen, dass, wenn *irgendein* Stein fällt, sicher auch sein Nachfolger fällt – und natürlich, dass der erste Stein fällt. Diese verblüffende Idee beschert der Mathematik eine starke Beweismethode.

Die Grundlagenmathematik legitimiert dieses Beweisverfahren axiomatisch durch Anerkennung dieses Axioms:

$$\left[A(1) \wedge \forall n\,(A(n) \rightarrow A(n+1))\,\right] \rightarrow A(n)$$

Die Vollständige Induktion lässt sich auch vergleichen mit einer unendlichen Reiterpost; der erste Reiter startet mit der Botschaft, und der n-te Reiter übergibt sie stets dem $(n+1)$-ten. Auf diese Weise überträgt sich die Botschaft an alle unendlich vielen Reiter. Der Geschichtsschreiber Herodot beschrieb eine solche (natürlich nicht unendliche) persische Reiterpost.

Erste Gehversuche mit der Vollständigen Induktion

Behauptung 1

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}$

Beweis:

- **Start:** Wir müssen zeigen, dass die Aussage wenigstens für die kleinste sinnvolle natürliche Zahl gilt, also (hier) für $n = 1$:

  Für $n = 1$ lautet die Aussage so: $A(1)$: $1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$
  Nachrechnen zeigt, dass dies korrekt ist, also ist $A(1)$ nachgewiesen.

- **Schritt:** Wir müssen zeigen, dass, *falls* $A(n)$ gilt, dann auch $A(n+1)$ gilt. Wir setzen also voraus, dass $A(n)$ gilt:

  (IV) Induktionsvoraussetzung $A(n)$: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
  Nun müssen wir nachweisen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ gilt.

  Zu zeigen: $A(n+1)$: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2\,(n+1)+1)}{6}$
  (Dabei haben wir einfach jedes n in der IV durch $n+1$ ersetzt.)

  Wir überprüfen nun $A(n+1)$, indem wir die IV benutzen. Die Stelle, bei der die IV benutzt wird, haben wir hier rot hervorgehoben:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6\,(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1) \cdot \left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1) \cdot \left(2n^2 + 7n + 6\right)}{6} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

  Damit ist auch $A(n+1)$ überprüft.

Mit dem Start und dem Schritt zusammen haben wir also Folgendes geleistet:
$A(1)$ verifiziert und $A(n) \implies A(n+1)$ bewiesen. Damit ist die Behauptung allgemein nachgewiesen, und der Beweis ist abgeschlossen. □

Behauptung 2

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}}$

Beweis:

- **Start:** Wir müssen zeigen, dass die Aussage wenigstens für die kleinste sinnvolle natürliche Zahl gilt, also (hier) für $n = 1$:

  Für $n = 1$ lautet die Aussage so: $A(1)$: $1^3 \stackrel{?}{=} \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$
  Nachrechnen zeigt, dass dies korrekt ist, also ist $A(1)$ nachgewiesen.

- **Schritt:** Wir müssen zeigen, dass, *falls* $A(n)$ gilt, dann auch $A(n+1)$ gilt. Wir setzen also voraus, dass $A(n)$ gilt:

  (IV) $A(n)$: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$
  Nun müssen wir nachweisen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ gilt.

  Zu zeigen: $A(n+1)$: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$

  Wir überprüfen nun $A(n+1)$, indem wir die IV benutzen. Die Stelle, bei der die IV benutzt wird, haben wir hier rot hervorgehoben:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= \left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot \left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

  Damit ist auch $A(n+1)$ überprüft.

Mit dem Start und dem Schritt zusammen haben wir also Folgendes geleistet:
$A(1)$ verifiziert und $A(n) \implies A(n+1)$ bewiesen. Damit ist die Behauptung allgemein nachgewiesen, und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Gehen Sie nun analog vor bei den folgenden Behauptungen:

Behauptung 3

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}}$

Behauptung 4

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1}$

Behauptung 5

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}}$

Behauptung 6

$A(n)$: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}}$

Kann Vollständige Induktion etwas Falsches beweisen?

Natürlich nicht, es handelt sich ja um eine axiomatisch abgestützte Beweismethode. Aber man könnte durchaus etwas Falsches beweisen, wenn man sie schlampig anwendet. Hier untersuchen wir ein Beispiel einer falschen Aussage, bei der der Induktionsschritt aber durchaus gelingt. Würde man also – verwöhnt vom üblichen leichten Erfolg des Induktionsstarts – auf den Start verzichten, so könnte man zum falschen Schluss kommen, dass die Aussage wahr ist.

Behauptung: $A(n)$: $\boxed{6 \,\big|\, (7^n+1) \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

Das ist immer falsch, man würde den Start also niemals schaffen, auch wenn man noch so lange nach einer geeigneten natürlichen Zahl n sucht. Der Schritt dagegen gelingt mühelos.

- **Schritt:** Wir müssen zeigen, dass, *falls* $A(n)$ gilt, dann auch $A(n+1)$ gilt. Wir setzen also voraus, dass $A(n)$ gilt:

  (IV): $6 \,\big|\, (7^n+1)$ Das ist gleichbedeutend mit $7^n+1=6\cdot k$ für ein $k\in\mathbb{N}$.
  Nun müssen wir nachweisen, dass unter dieser Voraussetzung auch $A(n+1)$ gilt.

Zu zeigen: $A(n+1)$: $7^{n+1}+1 = 6 \cdot l$ für ein $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 7^{n+1}+1 &= 7 \cdot 7^n + 1 \\ &= 7 \cdot (7^n+1) - 6 \\ &= 7 \cdot 6 \cdot k - 6 \qquad \text{nach IV} \\ &= 6 \cdot (7k-1) \end{aligned}$$

Wenn wir also $7k-1$ durch l abkürzen, ist das Gewünschte nachgewiesen.

Der Schritt ist also gelungen. Trotzdem ist die Behauptung immer falsch!

Übung

Auch die folgende Behauptung ist immer falsch. Trotzdem gelingt der Schritt.

Behauptung: $\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}}$ für alle $n \geq 1$.

a) Zeigen Sie, dass der Schritt gelingt.

b) Warum ist die Behauptung immer falsch? Betrachten wir zuerst die linke Seite. Beweisen Sie, dass die linke Seite < 2 ist für alle natürlichen Zahlen n.

c) Beweisen Sie weiter, dass die rechte Seite ab $n = 2$ immer ≥ 2 ist.

d) Die Überlegungen in b) und c) zeigen, dass die Behauptung für alle $n \geq 2$ falsch sein muss. (Warum?) Bleibt die einzige Möglichkeit, dass sie für $n = 1$ zutrifft. Tut sie das?

Weitere Anwendungen

Wiedersehen mit einer altbekannten Formel, nun aber verallgemeinert

Von früher sind wir mit der Formel $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$ bestens vertraut. Multipliziert man die rechte Seite aus, so entstehen nebst den beiden Quadraten von a bzw. b zwei weitere Summanden, die sich gegenseitig aufheben. Man kann sich fragen, ob es ähnliche „Aufspaltformeln“ auch gibt, wenn man den Exponenten erhöht. Und tatsächlich wird man schnell fündig.

a) Füllen Sie die zweite Klammer mit drei geeigneten Summanden:

$a^3 - b^3 = (a-b)\,(\qquad\qquad\qquad)$

b) Füllen Sie die zweite Klammer mit vier geeigneten Summanden:

$a^4 - b^4 = (a-b)\,(\qquad\qquad\qquad\qquad)$

c) Welche allgemeine Formel für $n \in \mathbb{N}$ dürfte also wahrscheinlich gelten?

$a^n - b^n = (a-b)\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$

d) Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.
Hinweis: Überprüfen und nutzen Sie die folgende Umformung:

$a^{n+1} - b^{n+1} = a \cdot (a^n - b^n) + a \cdot b^n - b^{n+1}$

Eine Teilbarkeitseigenschaft

Es ist klar, dass 4 ein Teiler von $9-5$ ist, dass also $4 \,\big|\, (9-5)$. Gilt das noch immer, wenn wir 9 und 5 je mit höheren Exponenten als 1 versehen?

Behauptung: $\boxed{4 \,\big|\, (9^n - 5^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Beweisen Sie das mit vollständiger Induktion.
Hinweis: Überprüfen und nutzen Sie die folgende Umformung: $9^{n+1} - 5^{n+1} = 9 \cdot (9^n - 5^n) + ...$

Eine berühmte Ungleichung von Bernoulli

Für beliebige $x > -1$ und alle natürlichen Zahlen n gilt die folgende *Ungleichung von Bernoulli*:

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.}$$

Beweisen Sie das mit vollständiger Induktion.

Lösung:

- **Start:** für $n = 1$: $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ trifft zu. Es herrscht sogar Gleichheit.
- **Schritt:** Wir setzen voraus, dass (**IV**): $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für irgendeine natürliche Zahl n. Und wir müssen zeigen, dass dann $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$ gilt.

  Das zeigt man so:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\geq (1 + n \cdot x) \cdot (1+x) \qquad \text{nach IV} \\
&= 1 + x + n \cdot x + n \cdot x^2 \\
&\geq 1 + x + n \cdot x \qquad \text{da ja ganz sicher } n \cdot x^2 \geq 0 \text{ ist} \\
&= 1 + (n+1) \cdot x
\end{aligned}$$

Genau das sollte gezeigt werden. □

PS: Warum ist die Voraussetzung $x > -1$ wichtig?

Eine echte Herausforderung: Der binomische Lehrsatz

Wir haben früher den binomischen Lehrsatz kennengelernt, der eine Verallgemeinerung der altbekannten binomischen Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ darstellt. Um der Erinnerung auf die Sprünge zu helfen:

a) $(a+b)^3 = ...$

b) $(a+b)^4 = ...$

c) Welcher Struktur/Regel folgen die einzelnen summierten a-b-Potenzen bei $(a+b)^n$?

d) Welcher Regel folgen die Koeffizienten bei $(a+b)^n$?

e) Wie ist das Pascal-Dreieck aufgebaut, das die in d) erwähnten Koeffizienten enthält?

f) Was hat schon wieder die Frage, auf wie viele Arten $k\,(\leq n)$ Dinge aus n Dingen ausgewählt werden können, damit zu tun?

g) Es gilt also der folgende *binomische Lehrsatz*: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$

Beweisen Sie ihn mit vollständiger Induktion.

Vollständige Induktion auf zwei Seiten

Es gibt natürlich auch Aussagen, die für alle *ganzen* Zahlen gelten. Können wir die vollständige Induktion so anpassen, dass sie auch in der Lage ist, solche Aussagen zu beweisen? Als Beispiel einer solchen Aussage möge diese dienen:

Behauptung: $\boxed{3 \,\big|\, \left(n^3 + 2n\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

a) Führen Sie den Start aus.

b) Führen Sie den Schritt für $n \to n+1$ aus.

c) Damit gilt die Aussage nun für alle natürlichen Zahlen. Wie aber gelangen wir ins Negative? Dazu müssen Sie einen zweiten Schritt ausführen. Welchen? Tun Sie das.