



# Differentialrechnung

Grenzwerte von Funktionen

Meike Akveld

## Grenzwert einer Funktion an einer endlichen Stelle

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt in  $x_0$  den Grenzwert  $L \in \mathbb{R}$ , wenn sich  $f(x)$  bei unbegrenzter Näherung von  $x$  an  $x_0$  unbegrenzt an  $L$  nähert.

Notation: Man schreibt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  (gesprochen: Limes  $f(x)$  gleich  $L$  für  $x$  gegen  $x_0$ ) oder  $f(x) \rightarrow L$  für  $x \rightarrow x_0$ .

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2 - x} =$$

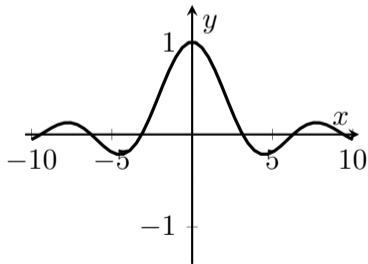
Fazit: Es ist nicht immer schwierig einen Grenzwert zu bestimmen!

## Bemerkung

Die Funktion muss an der Grenze nicht definiert sein.

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

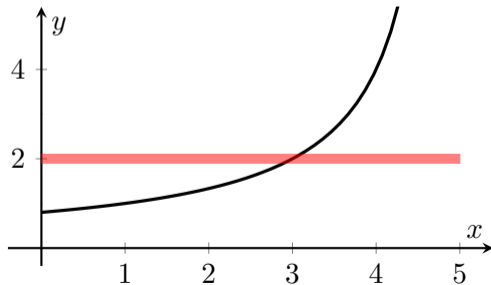


## Formelle Definition

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt in  $x_0$  den Grenzwert  $L \in \mathbb{R}$ , wenn sich für jede beliebig kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  eine zweite Zahl  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  finden lässt, so dass für alle  $x$  mit  $0 < |x - x_0| < \delta$  gilt  $|f(x) - L| < \varepsilon$  (eventuell mit Ausnahme der Stelle  $x_0$ ).

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{5 - x}$$



## Existenz von Grenzwerten

Grenzwerte können aus verschiedenen Gründen nicht existieren:

- Funktionswert strebt gegen  $\infty$  oder gegen  $-\infty$

Beispiel:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

- Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind nicht identisch

Beispiel:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

# Stetigkeit

Eine Funktion  $f$  heisst stetig in  $x_0$ , wenn

- $f(x) \rightarrow L$  für  $x \rightarrow x_0$  und
- $f(x_0) = L$ .

## Grenzwerte im Unendlichen

Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt für  $x \rightarrow \infty$  den Grenzwert  $L$ , wenn sich  $f(x)$  für unbegrenzt grosse  $x$  unbegrenzt an  $L$  nähert.

Analog ist der Grenzwert für  $x \rightarrow -\infty$  definiert.

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$$