# Differentialrechnung

## Produkt- und Quotientenregel

Simon Knellwolf

# Das Produkt von Funktionen

Sind $f$ und $g$ zwei Funktionen, dann ist ihr Produkt $f \cdot g$ definiert durch

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Die Definitionsmenge von $f \cdot g$ ist die Schnittmenge der Definitionsmengen von $f$ und $g$: $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$.

# Beispiel

Seien $f$ und $g$ definiert durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 3$.

Das Produkt $p = f \cdot g$ ist dann definiert durch $p(x) = x^2(x - 3)$.

# Die Ableitung von $f \cdot g$

## Produktregel

Sind $f$ und $g$ zwei differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen $f'$ und $g'$, dann ist das Produkt $f \cdot g$ ebenfalls differenzierbar und seine Ableitung ist definiert durch

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

# Zurück zum Beispiel

$$p(x) = x^2(x-3) = f(x)g(x)$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2x(x-3) + x^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

# Herleitung

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}
$$

# Der Quotient von Funktionen

Sind $f$ und $g$ zwei Funktionen, dann ist ihr Quotient $\dfrac{f}{g}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Die Definitionsmenge ist $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

# Die Ableitung von $\dfrac{f}{g}$

## Quotientenregel

Sind $f$ und $g$ zwei differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen $f'$ und $g'$, dann ist der Quotient $\dfrac{f}{g}$ ebenfalls differenzierbar und seine Ableitung ist definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

# Beispiel

$$q(x) = \frac{x-5}{x^2} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{1 \cdot x^2 - (x-5) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 + 10x}{x^4} = \frac{-x+10}{x^3} \end{aligned}$$

# Herleitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)g(x) = f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)g(x) + \left(\frac{f}{g}\right)(x)g'(x) = f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$