ETH zürich

Differentialrechnung

Kettenregel

Simon Knellwolf

Verkettung von Funktionen

Es seien f und g zwei Funktionen mit den Definitionsmengen D_f und D_g.

Die *Verkettung* $f \circ g$ ist definiert durch $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f\big(g(x)\big)
\end{tikzcd}$$

Terminologie:

- f ist die äussere Funktion
- g ist die innere Funktion

Definitionsmenge von $f \circ g$: $D_{f \circ g} = \big\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\big\}$.

Ableiten von $f \circ g$

Kettenregel

Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen f' und g', dann ist auch $f \circ g$ differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Terminologie:

Man nennt f' auch die äussere Ableitung und g' die innere Ableitung.

Herleitung

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'\big(g(x_0)\big) g'(x_0)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Es sei k definiert durch $k(x) = (4x - 5)^7$.

Es gilt $k = f \circ g$ mit $f(x) = x^7$ und $g(x) = 4x - 5$.

Ableitungen von f und g: $f'(x) = 7x^6$ und $g'(x) = 4$.

Anwendung der Kettenregel:

$$k'(x) = 7 \cdot (4x - 5)^6 \cdot 4 = 28 \cdot (4x - 5)^6.$$