



Differentialrechnung

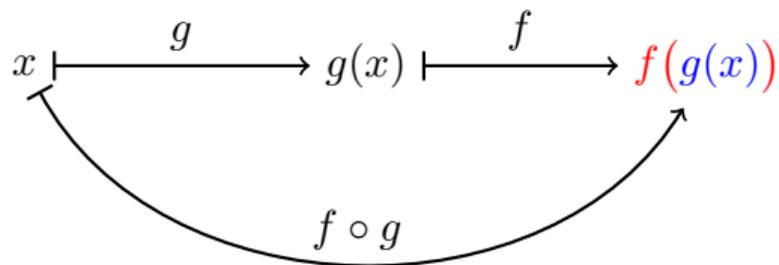
Kettenregel

Simon Knellwolf

Verkettung von Funktionen

Es seien f und g zwei Funktionen mit den Definitionsmengen D_f und D_g .

Die *Verkettung* $f \circ g$ ist definiert durch $f \circ g(x) = f(g(x))$.



Terminologie:

- f ist die **äussere Funktion**
- g ist die **innere Funktion**

Definitionsmenge von $f \circ g$: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Ableiten von $f \circ g$

Kettenregel

Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen mit den Ableitungen f' und g' , dann ist auch $f \circ g$ differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Terminologie:

Man nennt f' auch die äussere Ableitung und g' die innere Ableitung.

Herleitung

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0)\end{aligned}$$

Beispiel

Es sei k definiert durch $k(x) = (4x - 5)^7$.

Es gilt $k = f \circ g$ mit $f(x) = x^7$ und $g(x) = 4x - 5$.

Ableitungen von f und g : $f'(x) = 7x^6$ und $g'(x) = 4$.

Anwendung der Kettenregel:

$$k'(x) = 7 \cdot (4x - 5)^6 \cdot 4 = 28 \cdot (4x - 5)^6.$$