Differentialrechnung

Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Simon Knellwolf

Der natürliche Logarithmus

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$.

Der *natürliche Logarithmus von a* ist der Exponent x, der die Gleichung $e^x = a$ erfüllt. Man schreibt $x = \ln(a)$.

Die Logarithmengesetze gelten auch für den natürlichen Logarithmus.

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Q}$ gilt:

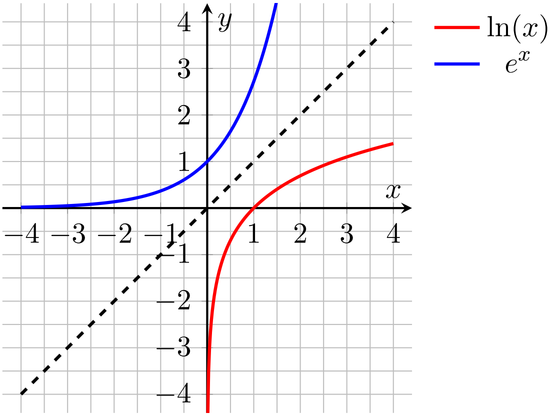
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a : b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Die natürliche Logarithmusfunktion

Die Funktion f definiert durch $f(x) = \ln(x)$ nennt man die *natürliche Logarithmusfunktion*.

Die Definitionsmenge von f enthält alle positiven reellen Zahlen: $D_f = \mathbb{R}^+$.

Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.



Die Ableitung von $\ln(x)$

Es sei f definiert durch $f(x) = \ln(x)$ für $x \geq 0$.

Die Umkehrfunktion von f ist die Funktion g definiert durch $g(x) = e^x$.

Die Ableitung lässt sich mit der Regel für die Umkehrfunktion bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$$

Die Ableitung von $\ln(x)$

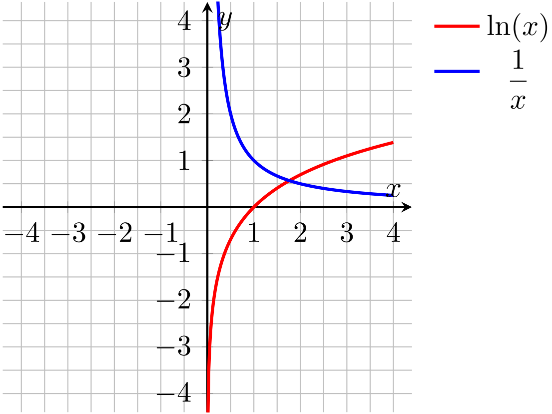
Es sei f definiert durch $f(x) = \ln(x)$ für $x \geq 0$.

Die Umkehrfunktion von f ist die Funktion g definiert durch $g(x) = e^x$.

Die Ableitung lässt sich mit der Regel für die Umkehrfunktion bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Graphische Veranschaulichung



Zusammenfassung

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Die Funktion f definiert durch $f(x) = \ln(x)$ ist differenzierbar und ihre Ableitung f' ist definiert durch $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Bemerkung:

Die Ableitung f' ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Dies ist kein Widerspruch zur Differenzierbarkeit von f, da $0 \notin D_f$.