Differentialrechnung

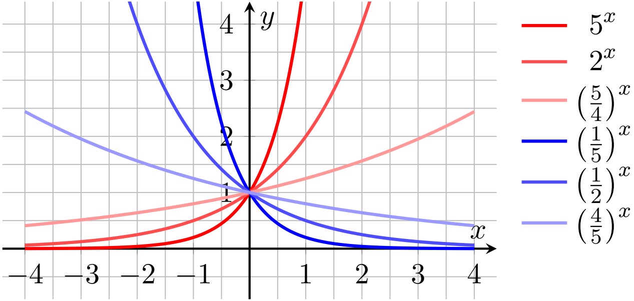
Ableiten von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Simon Knellwolf

Exponentialfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion f definiert durch $f(x) = b \cdot a^x$ nennt man eine *Exponentialfunktion*.



Die Ableitung von a^x

Es sei f definiert durch $f(x) = a^x$ für $a \in \mathbb{R}^+$.

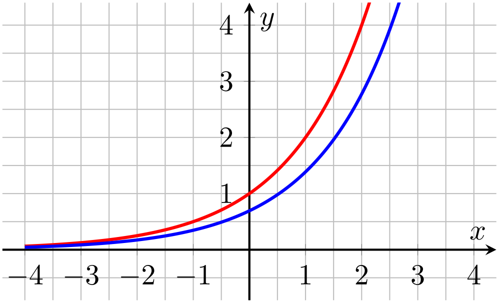
Es gilt $a = e^{\ln(a)}$ und deshalb $f(x) = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$.

Die Ableitung lässt sich nun mit der Kettenregel bestimmen:

$$f'(x) = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Beispiel

Es sei f definiert durch $f(x) = 2^x$. Dann ist $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$.



Zusammenfassung

Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion f definiert durch $f(x) = a^x$ ist differenzierbar und ihre Ableitung f' ist definiert durch $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Logarithmusfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$.

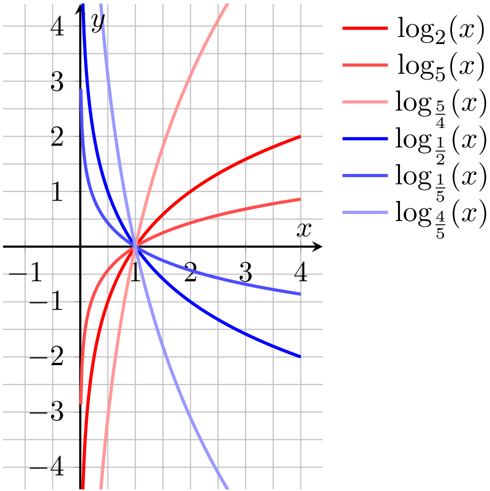
Eine Funktion f definiert durch

$$f(x) = \log_a(x)$$

nennt man eine *Logarithmusfunktion*.

Die Definitionsmenge von f enthält alle positiven reellen Zahlen:

$$D_f = \mathbb{R}^+.$$



Die Ableitung von $\log_a(x)$

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ und f definiert durch $f(x) = \log_a(x)$ für $x \geq 0$.

Die Umkehrfunktion von f ist die Exponentialfunktion g definiert durch $g(x) = a^x$.

Die Ableitung lässt sich mit der Regel für die Umkehrfunktion bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Zusammenfassung

Die Ableitung von Logarithmusfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion f definiert durch $f(x) = \log_a(x)$ ist differenzierbar und ihre Ableitung f' ist definiert durch $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(a) \cdot x}$.

Bemerkung:

Die Regel gilt natürlich auch für den Spezialfall $a = e$, da ja $\ln(e) = 1$.