Exponentialfunktion

Exponentielle Zusammenhänge, Definition und Eigenschaften

Carina Heiss

Exponentialfunktion – Wofür eigentlich?

- Ein Geldbetrag mit einer festen jährlichen Verzinsung wächst exponentiell.
- Viele Lebewesen vermehren sich so, dass ihre Anzahl exponentiell steigt.
- Die Anzahl der Nuklide bei einem radioaktiven Zerfall sinkt exponentiell.

Definition der Exponentialfunktion

Seien $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a > 0$ und $a \neq 1$. Eine Funktion der Art $f : x \mapsto c \cdot a^x$ heisst *Exponentialfunktion*.

Bemerkungen:

Der Fall $a = 1$ wird oft ausgeschlossen.

$f(x) = c \cdot 1^x = c$

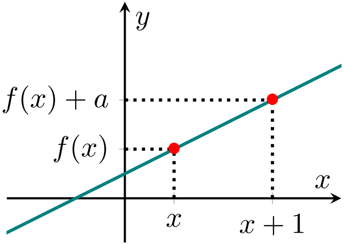
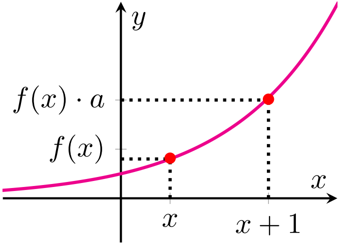
Eigenschaften der Exponentialfunktion

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c \cdot a^x \\
f(x+1) &= c \cdot a^{x+1} = c \cdot a^x \cdot a^1 = {\color{red} c \cdot a^x} \cdot a = {\color{red} f(x)} \cdot a
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion

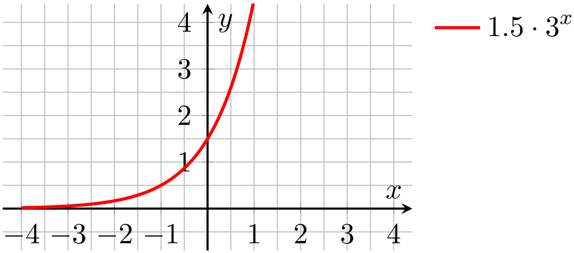
Erhöht man bei einer Exponentialfunktion f, definiert durch $f(x) = c \cdot a^x$, die Inputvariable um 1, so erfährt der Funktionswert $f(x)$ eine Ver-a-fachung.

Vergleich mit linearer Funktion

Lineare Funktion	Exponentialfunktion
$f(x) = a \cdot x + b$ $f(x+1) = a \cdot x + a + b$ $\Longrightarrow \; f(x+1) = f(x) + a$	$f(x) = c \cdot a^x$ $f(x+1) = c \cdot a^x \cdot a$ $\Longrightarrow \; f(x+1) = f(x) \cdot a$
 	

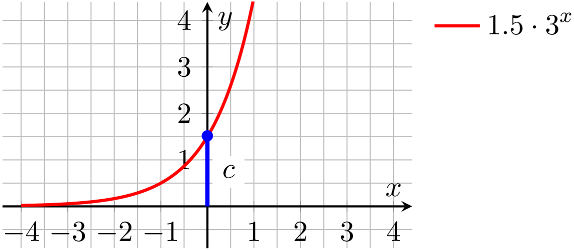
Der Graph der Exponentialfunktion

$f : x \mapsto c \cdot a^x, \; a > 1, \; c > 0$



- keine Nullstelle
- für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv
- streng monoton steigend

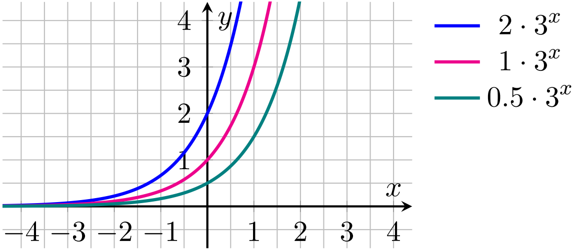
y-Achsenabschnitt



Schnittstelle mit der y-Achse:

$f(0) = c \cdot a^0 = c \cdot 1 = c$

y-Achsenabschnitt



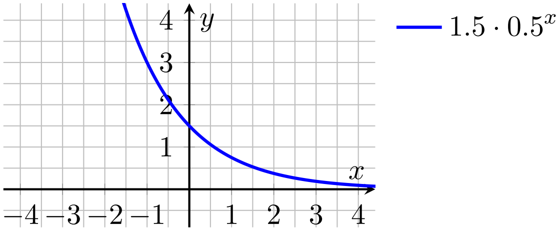
Monotonie

$$f(x+h) = c \cdot a^{x+h} = c \cdot a^{x} \cdot a^{h} = f(x) \cdot a^{h}$$

Wenn $a > 1$ und $h > 0 \implies f(x+h) > f(x)$

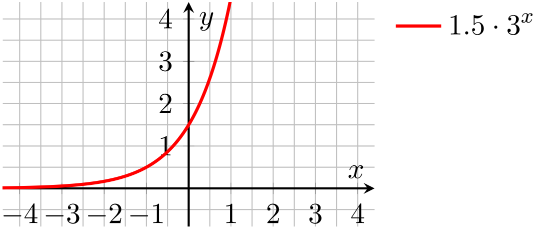
Graph einer Exponentialfunktion mit $0 < a < 1$

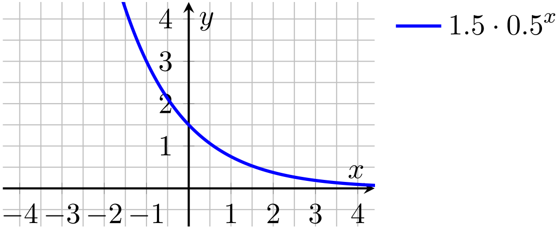
$f : x \mapsto c \cdot a^x,\ 0 < a < 1,\ c > 0$



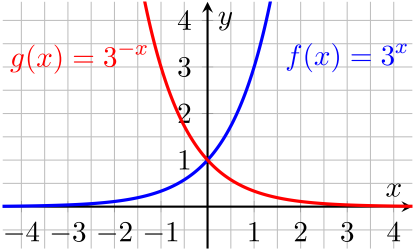
- keine Nullstelle
- für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv
- streng monoton fallend

Injektivität



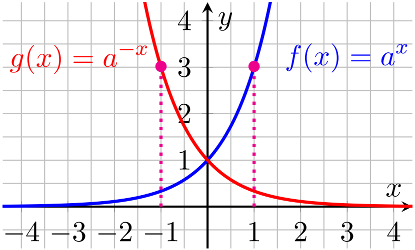


Achsensymmetrie



Die Graphen der Funktionen f und g, definiert durch $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ sind achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Achsensymmetrie



Zu zeigen: $f(x) = g(-x)$.

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{x} = \frac{1}{a^{x}} = a^{-x}$$

$$\underline{g(-x)} = a^{-(-x)} = a^{x} = \underline{f(x)}$$