Integralrechnung

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Simon Knellwolf

Vorbemerkung zur Terminologie

- Die Funktionen, die in diesem Video vorkommen, sind stetig und reell.
  Wir bezeichnen sie jeweils mit f und gegebenfalls mit g.
- Integrationsgrenzen sind reelle Zahlen, die in der Definitionsmenge der zu integrierenden Funktion liegen. Wir bezeichnen sie mit a und b, wobei $a < b$.

Zwei sinnvolle Definitionen

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx := 0$

2) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Eigenschaften des bestimmten Integrals

1) $\forall k \in \mathbb{R} : \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

3) $\forall c \in [a, b] : \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Beweise der Eigenschaften

Die Eigenschaften 1) und 2) gehen auf die entsprechenden Grenzwertsätze zurück.

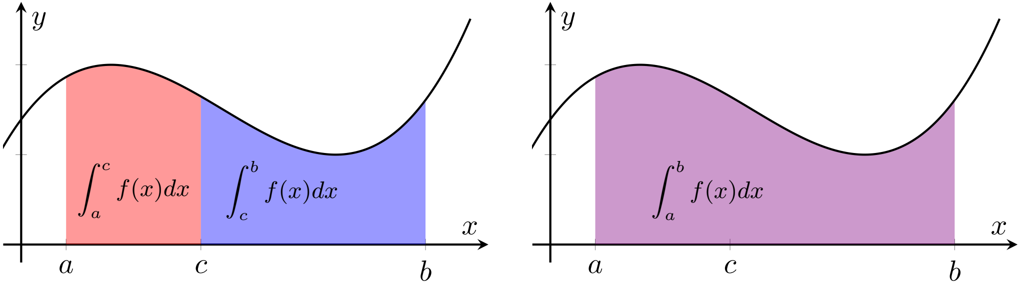
Exemplarisch betrachten wir den Beweis von 1):

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} k \cdot f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$= k \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Beweise der Eigenschaften

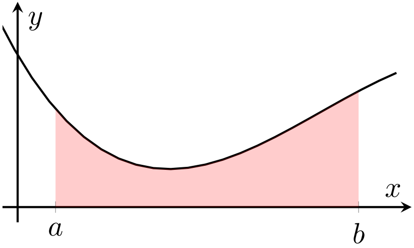
Die Eigenschaft 3) ist geometrisch klar, wenn das Integral einen Flächeninhalt darstellt:

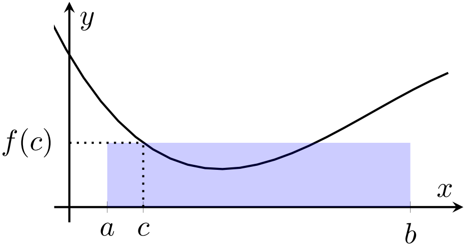


Die Eigenschaft gilt auch im allgemeinen Fall und lässt sich rein rechnerisch beweisen.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

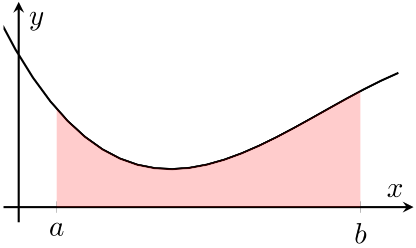
4) $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

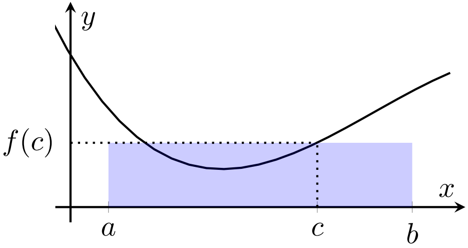




Mittelwertsatz der Integralrechnung

4) $\exists c \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$



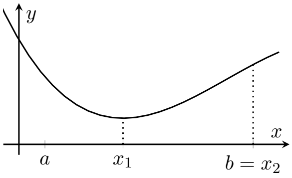


Beweis

Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass f an der Stelle x_1 ein Minimum und an der Stelle x_2 ein Maximum erreicht (innerhalb von $[a, b]$).

Dann gilt

$$f(x_1) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2) \cdot (b-a).$$

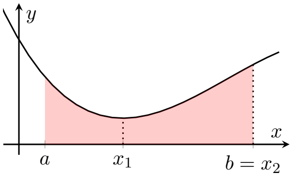


Beweis

Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass f an der Stelle x_1 ein Minimum und an der Stelle x_2 ein Maximum erreicht (innerhalb von $[a, b]$).

Dann gilt

$$f(x_1) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2) \cdot (b-a).$$

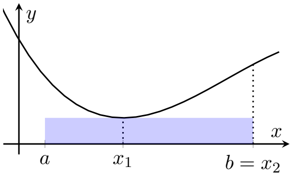


Beweis

Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass f an der Stelle x_1 ein Minimum und an der Stelle x_2 ein Maximum erreicht (innerhalb von $[a, b]$).

Dann gilt

$$\color{blue}{f(x_1) \cdot (b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2) \cdot (b-a).$$

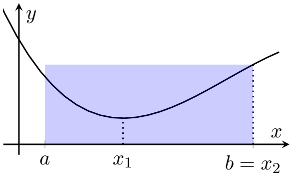


Beweis

Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass f an der Stelle x_1 ein Minimum und an der Stelle x_2 ein Maximum erreicht (innerhalb von $[a, b]$).

Dann gilt

$$f(x_1) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2) \cdot (b-a).$$

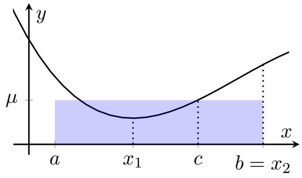


Beweis

Es seien $x_1, x_2 \in [a,b]$, so dass f an der Stelle x_1 ein Minimum und an der Stelle x_2 ein Maximum erreicht (innerhalb von $[a,b]$).

Dann gilt

$$f(x_1)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)\cdot(b-a).$$



Zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gibt es also eine Zahl μ, so dass

$$\mu\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Weil die Funktion f stetig ist, gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass $f(c) = \mu$.