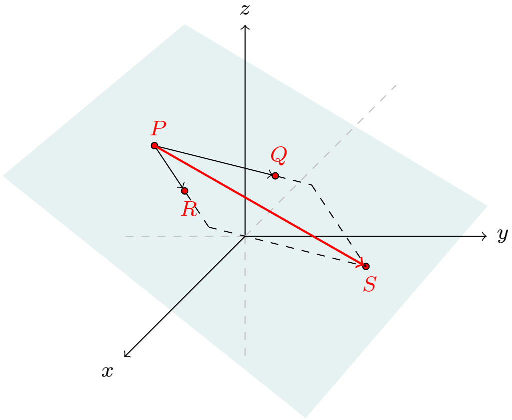
Vektorgeometrie

Ebenen

Meike Akveld

Ebenen in $\mathbb{R}^3$



Und somit gibt es reelle Zahlen t und s so dass gilt

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR}$$

Parameterdarstellung einer Ebene

Seien P, Q und R drei Punkte im $\mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen, und sei E die Ebene durch diese drei Punkte. So ist die Gleichung

$$E : \vec{r} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR} \quad \text{für} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

die *Parametergleichung* oder die *Parameterdarstellung* der Ebene E. Sie liefert die Menge aller Ortsvektoren $\vec{r}$ zu Punkten der Ebene E.

Bemerkung: Weder der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ noch die Richtungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ sind eindeutig in der Parameterdarstellung der Ebene.

Koordinatengleichung einer Ebene

Die Parameterdarstellung der Ebene ist auch äquivalent zu folgenden *Komponentengleichungen*

$$\begin{aligned} x &= OP_x + s \cdot PQ_x + t \cdot PR_x \\ y &= OP_y + s \cdot PQ_y + t \cdot PR_y \\ z &= OP_z + s \cdot PQ_z + t \cdot PR_z \end{aligned}$$

wobei mit OP_x die x-Komponente des Vektors $\overrightarrow{OP}$ gemeint ist usw.

So erhalten wir die sogenannte *Koordinatengleichung*

$$ax + by + cz + d = 0$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Eine lineare Gleichung der Art

$$ax + by + cz + d = 0$$

hat als Lösungsmenge eine Ebene und heisst *Koordinatengleichung* der Ebene.

FAQs zu Ebenen

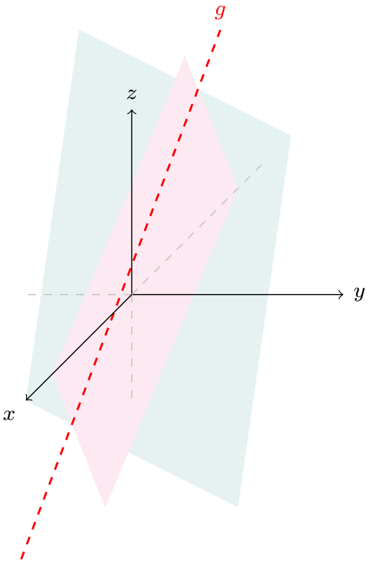
1) Liegt ein Punkt auf einer Ebene d.h. $P \in E$?
2) Wie bringt man eine Ebene in die jeweils andere Form?
3) Wie findet man den allfälligen Schnittpunkt von einer Gerade und einer Ebene d.h. $g \cap E = ...$?
4) Wie findet man die allfällige Schnittgerade zweier Ebenen d.h. $E_1 \cap E_2 = ...$?
5) Wie findet man den allfälligen Schnitt dreier Ebenen? Und was ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$?

Ein Beispiel:

Bestimme die Schnittgerade g der Ebenen
$E_1 : 2x + y + 3z = 1$ und $E_2 : 3x - y - z = 2$.

$$x = 0 \implies \begin{cases} y + 3z &= 1 \\ -y - z &= 2 \end{cases} \implies \begin{cases} z &= -\frac{7}{2} \\ y &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\implies P = \left(0, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{7}{2}\right) \in g$$



Ein Beispiel:

$$y = 0 \implies Q = (-1, 0, 1) \in g.$$

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$