Vektorgeometrie

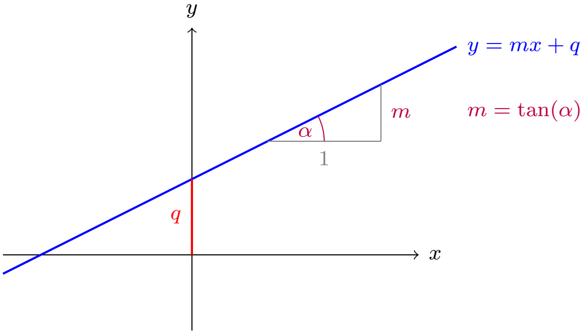
Geraden

Meike Akveld

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Eine nicht-vertikale Gerade in $\mathbb{R}^2$ lässt sich beschreiben durch eine Gleichung der Form

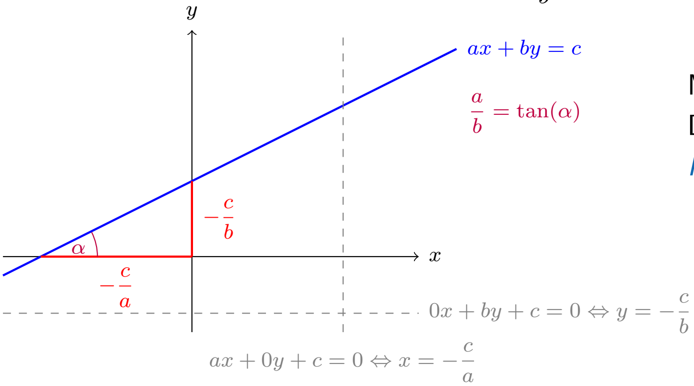
$$y = mx + q$$



Geraden in $\mathbb{R}^2$

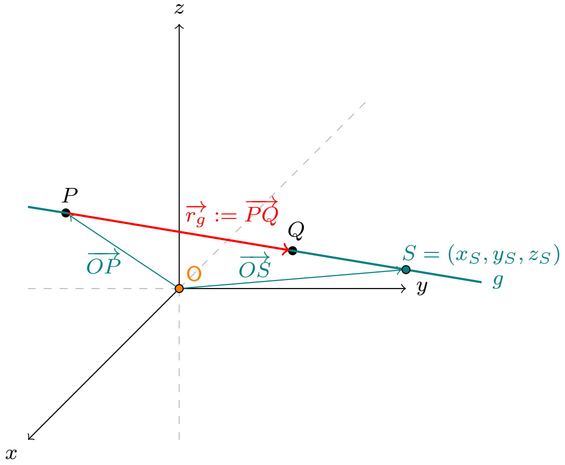
Allgemein lassen sich Geraden in $\mathbb{R}^2$ darstellen mit Hilfe von Gleichungen der Form

$$ax + by + c = 0$$



Man nennt diese Form der Darstellung einer Gerade eine *Koordinatengleichung*.

Geraden in $\mathbb{R}^3$



Der Vektor $\vec{r}_g := \overrightarrow{PQ}$ ist der *Richtungsvektor* von g.

Der Punkt S liegt auf der Gerade g, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Parameterdarstellung einer Geraden

Seien P und Q zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ und sei g die Gerade durch diese beiden Punkten. So ist die Gleichung

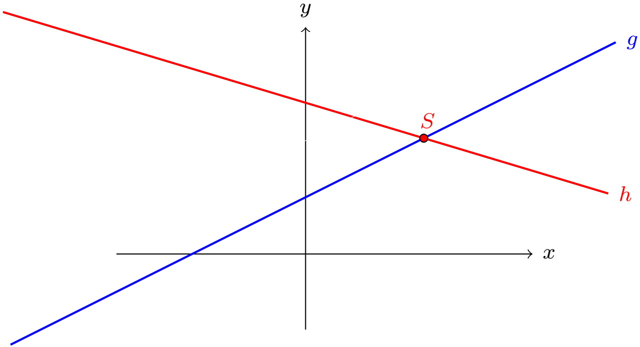
$$g : \vec{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

die *Parametergleichung* oder die *Parameterdarstellung* der Geraden g. Sie liefert die Menge aller Ortsvektoren $\vec{r}$ von Punkten auf der Gerade.

FAQs zu Geraden

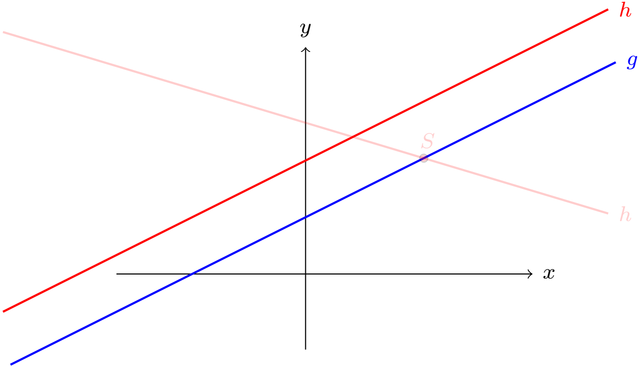
1) Liegt ein Punkt auf einer Gerade, d.h. $P \in g$?
2) Wie bringt man eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ in die jeweils andere Form?
3) Wie entscheidet man, ob zwei Geraden parallel oder sogar identisch sind d.h. $g \parallel h$ oder $g \equiv h$?
4) Wie berechnet man den allfälligen Schnittpunkt zweier Geraden d.h. $g \cap h = ...$?

Gegenseitige Lage von zwei Geraden



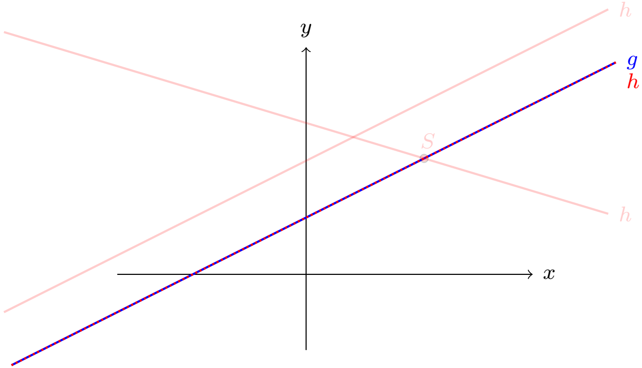
schneidend: $g \cap h = \{S\}$

Gegenseitige Lage von zwei Geraden



parallel: $g \parallel h$

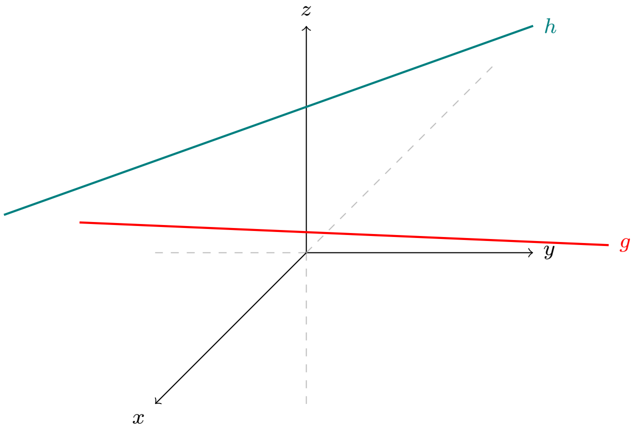
Gegenseitige Lage von zwei Geraden



identisch: $g \equiv h$

Gegenseitige Lage von zwei Geraden

Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$ sind entweder identisch, parallel, schneidend oder *windschief*.



Ein Beispiel:

Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h gegeben durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

Nein! Die beide Geraden sind also weder identisch noch parallel

Ein Beispiel:

Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h gegeben durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse die untenstehende Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Beispiel:

Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h gegeben durch

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder löse das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{cases} 1 + 2t &= 4 + s \qquad (I) \\ 0 + 2t &= 3 - 2s \qquad (II) \\ 1 + t &= 1 + 2s \qquad (III) \end{cases}$$

(I) und (II) implizieren $t = 1.5$ und $s = 0$ und damit wird (III) zu $1 + 1.5 = 1 + 2 \cdot 0$ was nicht stimmt. Deshalb sind die Geraden windschief.