

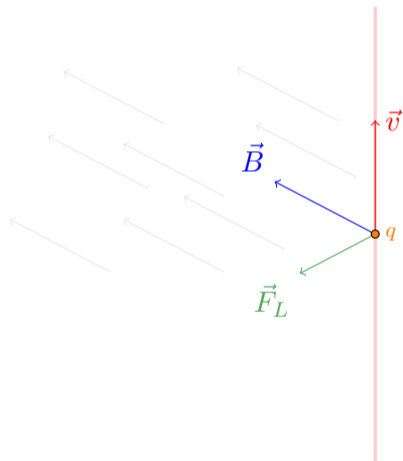


Vektorgeometrie

Vektorprodukt

Meike Akveld

Motivierendes Beispiel: Die Lorentzkraft

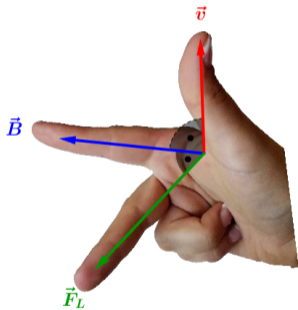


Hendrik Antoon Lorentz

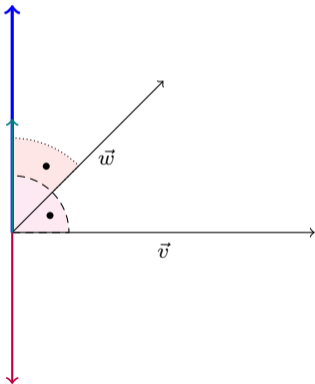
*18. Juli 1853

† 4. Februar 1928

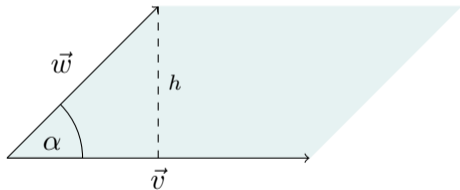
Motivierendes Beispiel: Die Lorentzkraft



Definition des Vektorprodukts: Die Länge



Definition des Vektorprodukts: Die Länge



$$A = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin(\alpha)$$

Bemerkungen:

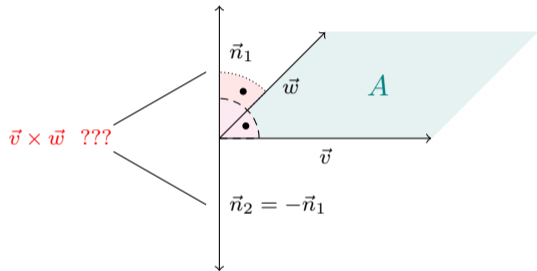
- Vergleiche diese Formel mit derjenigen

vom Skalarprodukt

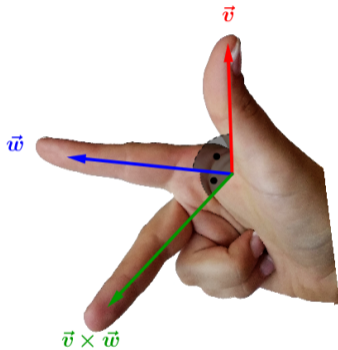
$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha \quad \text{und}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha$$

- Für den Fall $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$, gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$
- Wir haben nun die Definition des Vektorprodukts zurückgebracht zu der Wahl aus zwei Vektoren.



Definition des Vektorprodukts: Die Richtung



Das Vektorprodukt ist *nicht-kommutativ*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Definition des Vektorprodukts

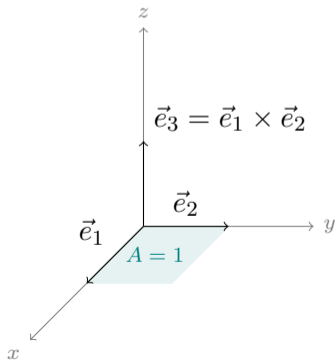
Sind \vec{v} und \vec{w} zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 so versteht man unter dem *Vektorprodukt* der beiden Vektoren den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf den beiden Vektoren \vec{v} und \vec{w} .
- Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ entspricht der Masszahl der Fläche des von \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Parallelogramms.
- Die drei Vektoren \vec{v} , \vec{w} und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein *Rechtssystem* und genügen somit der *Rechte-hand-Regel*.

Beachte: Das Vektorprodukt ist nur definiert für Vektoren in \mathbb{R}^3 !

Standardbeispiel in \mathbb{R}^3 Betrachte die sogenannte *Standardbasis* von \mathbb{R}^3

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}, \vec{w} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ impliziert, dass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

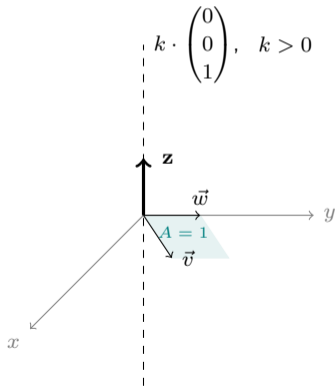
Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aus $x = -y$ und $y = 0$ folgt $\vec{v} \times \vec{w} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für irgendein $k \in \mathbb{R}$

Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Formel für das Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* von zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 lässt sich

berechnen durch

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Ebene durch 3 Punkte und Fläche eines Dreiecks

Bestimme die Ebene E durch die drei Punkte $A = (1, -1, 3)$, $B = (2, 1, 3)$ und $C = (4, 1, -3)$ und die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$.

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Und somit ist die Ebenengleichung von E

$$-12x + 6y - 4z + 30 = 0$$

Anwendung: Ebene durch 3 Punkte und Fläche eines Dreiecks

Bestimme die Ebene E durch die drei Punkte $A = (1, -1, 3)$, $B = (2, 1, 3)$ und $C = (4, 1, -3)$ und die Fläche des Dreiecks ΔABC .

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + (-4)^2} = 14$$

