Differentialrechnung

Potenzregel

Simon Knellwolf

Potenzfunktionen

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

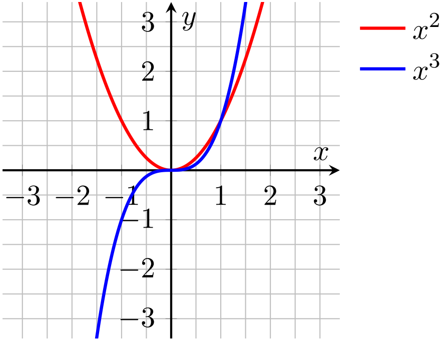
Eine Funktion f definiert durch $f(x) = ax^n$ nennt man eine *Potenzfunktion*.

Man nennt a den *Streckfaktor* und n den *Exponenten*.

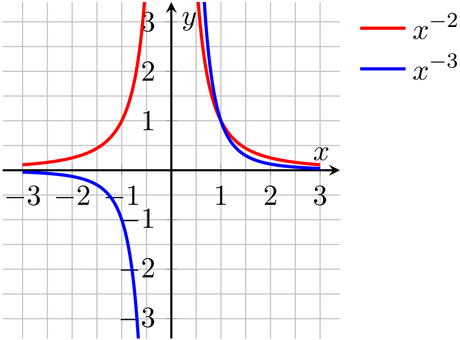
Die Definitionsmenge hängt vom Exponenten ab:

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } n \geq 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Graphen von Potenzfunktionen



Parabeln $(n > 0)$



Hyperbeln $(n < 0)$

Ableiten von Potenzfunktionen

Potenzregel für natürliche Exponenten

Die Funktion f definiert durch $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ ist differenzierbar und ihre Ableitung f' ist definiert durch $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bemerkungen:

- Die Regel behandelt nur Potenzfunktionen mit $a = 1$. Den allgemeinen Fall erledigt die Faktorregel (folgt noch).
- Die Potenzregel gilt auch für negative Exponenten. Das ist eine direkte Konsequenz der Quotientenregel (folgt auch noch).

Herleitung für $n = 2$

$$
\begin{aligned}
{\color{red}f'(x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} x_0 \\
&= x_0 + x_0 = {\color{red}2x_0}
\end{aligned}
$$

Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel

$$
\begin{aligned}
x^2 - x_0^2 &= (x - x_0)(x + x_0) \\
x^3 - x_0^3 &= (x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2) \\
x^4 - x_0^4 &= (x - x_0)(x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3) \\
&\dots \\
x^n - x_0^n &= (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})
\end{aligned}
$$

Herleitung für $n > 2$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\
&= \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + \lim_{x \to x_0} x^{n-2}x_0 + \ldots + \lim_{x \to x_0} x x_0^{n-2} + \lim_{x \to x_0} x_0^{n-1} \\
&= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}
\end{aligned}
$$