ETH zürich

Differentialrechnung

Ableitung der Umkehrfunktion

Simon Knellwolf

Umkehrfunktionen

Es sei $f : D_f \to W_f$ ein Funktion.

Eine Funktion g ist die Umkehrfunktion von f, wenn für jedes $x \in D_f$ gilt $g\big(f(x)\big) = x$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, bend left, "f"] & f(x) \arrow[l, mapsto, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Bemerkungen:

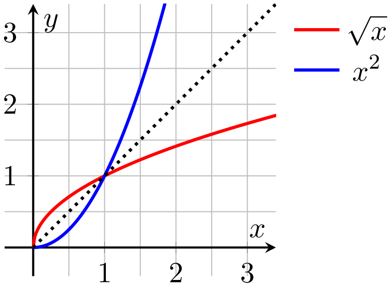
- Es gilt $D_g = W_f$ und $W_g = D_f$.
- Ist g die Umkehrfunktion von f, dann ist f die Umkehrfunktion von g.

Notation: Man schreibt häufig $g = f^{-1}$.

Beispiel

Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$.

Die Umkehrfunktion ist definiert durch $g(x) = x^2$.



Ableiten der Umkehrfunktion

Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei $f : D_f \to W_f$ eine umkehrbare Funktion und g ihre Umkehrfunktion.

Ist g differenzierbar und g' die Ableitung von g, dann ist f ebenfalls differenzierbar ausgenommen an den Stellen $x \in D_f$, an denen gilt $g'\big(f(x)\big) = 0$.

Die Ableitung f' ist definiert durch $f'(x) = \dfrac{1}{g'\big(f(x)\big)}$.

Herleitung

Da g die Umkehrfunktion ist von f, gilt $g\big(f(x)\big) = x$.

Diese Gleichung leiten wir auf beiden Seiten ab und erhalten

$$g'\big(f(x)\big)f'(x) = 1.$$

Falls $g'\big(f(x)\big) \neq 0$, können wir nach $f'(x)$ auflösen:

$$f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)}.$$

Anwendung: Wurzelfunktionen ableiten

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = \sqrt[n]{x}$ nennt man die *Wurzelfunktion* mit Exponent n.

In Potenzschreibweise für Wurzeln: $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

Die Umkehrfunktion von f ist die Funktion g definiert durch $g(x) = x^n$.

Es ist $g'(x) = nx^{n-1}$ und damit können wir $f'(x)$ bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{n\big(x^{\frac{1}{n}}\big)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

$g'\big(f(x)\big) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

Anwendung: Wurzelfunktionen ableiten

Regel für die Ableitung von Wurzelfunktionen

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ist differenzierbar ausgenommen an der Stelle $x = 0$.

Sie besitzt die Ableitung $f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

Anwendung: Wurzelfunktionen ableiten