Differentialrechnung

Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Simon Knellwolf

Die natürliche Exponentialfunktion

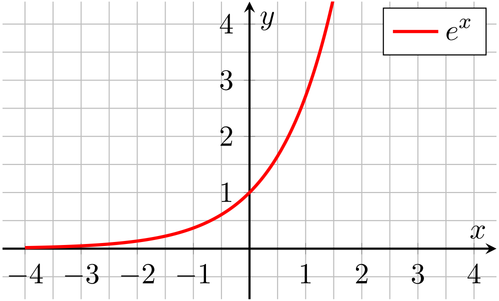
Die *Eulersche Zahl* e ist definiert als der Grenzwert $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Es ist $e = 2.718281828459045 23\ldots$

Die Funktion f definiert durch

$$f(x) = e^x$$

nennt man die *natürliche Exponentialfunktion*.



Die Ableitung von e^x

Es sei f die natürliche Exponentialfunktion, d.h. $f(x) = e^x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \right] \\
&= e^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1
\end{aligned}
$$

h	$\frac{e^h - 1}{h}$
1	1.718281
10^{-1}	1.051709
10^{-2}	1.005016
10^{-3}	1.000500
10^{-4}	1.000050
10^{-5}	1.000005

Die Ableitung von e^x

Es sei f die natürliche Exponentialfunktion, d.h. $f(x) = e^x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \left[e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \right] \\
&= e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = f(x_0)
\end{aligned}
$$

Das gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, d.h. $f' = f$.

Zusammenfassung

Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Man nennt die Funktion f definiert durch $f(x) = e^x$ die *natürliche Exponentialfunktion*.

Sie ist differenzierbar und besitzt sich selbst als Ableitung: $f'(x) = e^x$.