ETH zürich

Folgen, Grenzwerte und Reihen

Grenzwerte

Carina Heiss

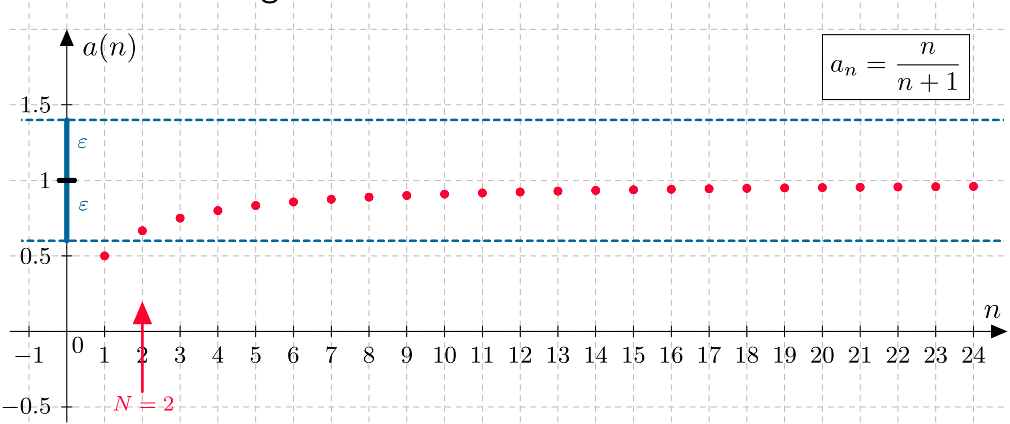
Grenzwert einer Folge

Definition: Die Folge (a_n) hat den **Grenzwert (Limes)** g, genau dann wenn zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, sodass $|a_n - g| < \varepsilon$ gilt $\forall n > N$.

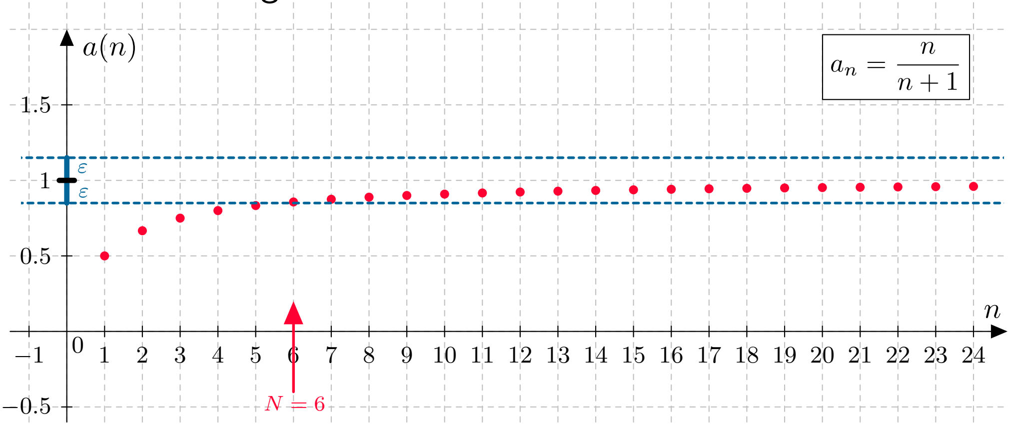
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$

Eine Folge heisst **konvergent**, falls eine reelle Zahl g existiert, sodass $g = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$.

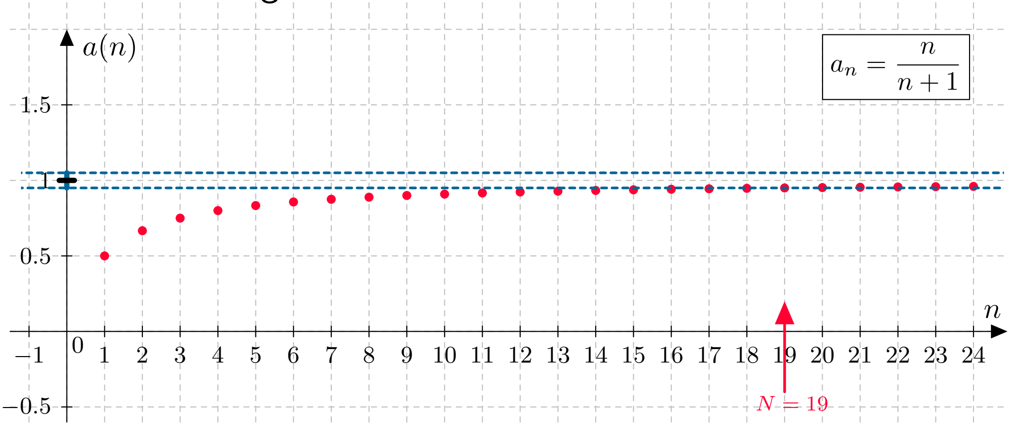
Veranschaulichung der Definition



Veranschaulichung der Definition



Veranschaulichung der Definition



Anwenden der Definition

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
|a_n - g| &< \varepsilon \\
|a_n - 1| &< \varepsilon \\
\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n
\end{aligned}$$

$$N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

Anwenden der Definition - 2. Beispiel

$a_n = \frac{1}{n}$ und $g = 0$

$$
\begin{aligned}
|a_n - g| &< \varepsilon \\
|a_n - 0| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n
\end{aligned}
$$

$$N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

Grenzwertsätze

Satz 1: Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls beide Folgen konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = h$, so ist auch die Folge $c_n := a_n + b_n$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(c_n) = g + h$.

Grenzwertsätze

Satz 2: Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls beide Folgen konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = h$, so ist auch die Folge $c_n := a_n - b_n$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(c_n) = g - h$.

Grenzwertsätze

Satz 3: Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls beide Folgen konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = h$, so ist auch die Folge $c_n := a_n \cdot b_n$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(c_n) = g \cdot h$.

Grenzwertsätze

Satz 4: Gegeben sind zwei Folgen: (a_n) und (b_n). Falls beide Folgen konvergent sind mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = g$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n) = h$, so ist auch die Folge $c_n := \frac{a_n}{b_n}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty}(c_n) = \frac{g}{h}$ $((b_n) \neq 0$ und $h \neq 0)$.

Anwendung der Grenzwertsätze - Beispiel

$$a_n = \frac{2n^2 + 4n - 3}{18 - 4n^2}$$

$$a_n = \frac{2 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}}{\frac{18}{n^2} - 4}$$

$$a_n = \frac{2 + 4 \cdot \frac{1}{n} - 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{18 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 4}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \frac{2 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0}{18 \cdot 0 \cdot 0 - 4} = -\frac{1}{2}$$