ETH zürich

Folgen, Grenzwerte und Reihen

Reihen

Carina Heiss

Was ist eine Reihe?

$a_n = 9, 13, 17, 21, 25, 29...$

$a_n = 4n + 5$

$s_1 = 9$

$s_2 = 9 + 13 = 22$

$s_3 = 9 + 13 + 17 = 39$

...

Definition einer Reihe

Definition: Sei a_n eine beliebige Folge. Die zugehörige **Reihe** ist die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$, wobei

$s_1 := a_1$

$s_2 := a_1 + a_2$

$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$

...

$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Den Term s_n nennt man auch n-**te Partialsumme**. Offenbar ist eine Reihe immer auch eine Folge, nämlich die Folge der Partialsummen der zugrundeliegenden Folge.

Arithmetische Reihe

Arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\
s_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
2s_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \ldots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \\
2s_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + & \ldots & + & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n)
\end{array}$$

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_{n-1} = a_n - d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

Arithmetische Reihe

Arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\begin{array}{rcccccccccc}
s_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\
s_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
2s_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \ldots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \\
2s_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + & \ldots & + & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) \\
2s_n & = & n \cdot (a_1 + a_n) & & & & & & & & \\
s_n & = & \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) & & & & & & & &
\end{array}$$

Geometrische Reihe

Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

n**-te Partialsumme:** $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n =$???

Geometrische Reihe

Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
s_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\
s_n & = & a_1 & + & \cancel{a_1 \cdot q} & + & \cancel{a_1 \cdot q^2} & + & \ldots & + & \cancel{a_1 \cdot q^{n-2}} & + & \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} \\
q \cdot s_n & = & \cancel{a_1 \cdot q} & + & \cancel{a_1 \cdot q^2} & + & \cancel{a_1 \cdot q^3} & + & \ldots & + & \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} & + & a_1 \cdot q^n
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
s_n - q \cdot s_n &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\
s_n \cdot (1 - q) &= a_1 \cdot (1 - q^n) \\
s_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}
\end{aligned}
$$

Die Weizenkorn-Legende

$$b_n = 2^{n-1}$$
$$b_1 = 1, q = 2$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s_n = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

$$= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Quelle: Chess Pieces by George Hodan

Grenzwerte einer Reihe

Arithmetische Reihen: Unendliche Arithmetische Reihen sind stets divergent.

Notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für Konvergenz: Summanden der Folge $(a_n)_n$ konvergieren gegen 0.

Reihe der reziproken Quadrate

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightarrow$ Die Reihe der reziproken Quadrate **konvergiert**.

Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... = \infty$$

$\rightarrow$ Harmonische Reihe **divergiert**.

Grenzwerte einer Reihe

Geometrische Reihen:

Ist $|q| > 1$, so wächst q^n über alle Grenzen und die Reihe divergiert.

Ist $|q| < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe.

Für eine geometrische Reihe mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1}$ gilt $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Für $|q| < 1$ konvergiert q^n gegen 0 . Daraus folgt, dass für den Grenzwert

$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ gilt.