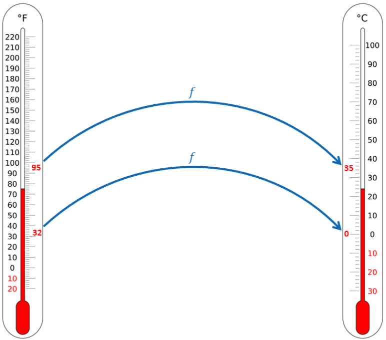
Grundlagen

Funktionen und Graphen

Meike Akveld

Beispiel



Umrechnungsformel: $$^\circ C = \frac{5}{9}\,(^\circ F - 32)$$

$$32\,^\circ F \longmapsto \frac{5}{9}\,(32-32) = 0^\circ\, C$$

$$95\,^\circ F \longmapsto \frac{5}{9}\,(95-32) = \frac{5}{9}\cdot 63 = 35^\circ\, C$$

Quelle: Wikimedia Commons

Was ist eine Funktion?

Eine *Funktion* ist eine Zuordnung f, die jedem Element x einer ersten Menge $\mathbb{D}$ (die *Definitionsmenge* oder die *Inputmenge*) irgendwie (z.B. nach einer bestimmten Regel oder Formel) genau ein Element y oder $f(x)$ einer zweiten Menge Z (der *Zielbereich* oder die *Outputmenge*) zuordnet.

Bemerkung ①: Die Umrechnungsfunktion von Fahrenheit nach Celsius

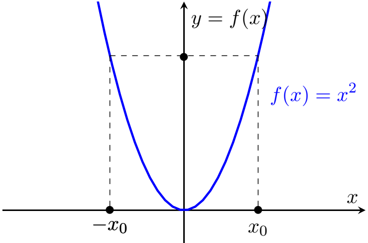
$$^\circ C = \frac{5}{9}(^\circ F - 32)$$

ordnet jeder Temperatur in Fahrenheit genau eine Temperatur in Celsius zu.

Was ist eine Funktion?

Eine *Funktion* ist eine Zuordnung f, die jedem Element x einer ersten Menge $\mathbb{D}$ (die *Definitionsmenge* oder die *Inputmenge*) irgendwie (z.B. nach einer bestimmten Regel oder Formel) genau ein Element y oder $f(x)$ einer zweiten Menge Z (der *Zielbereich* oder die *Outputmenge*) zuordnet.

Bemerkung ②: Es kann durchaus verschiedenen x-Werten derselbe y-Wert zugewiesen werden!

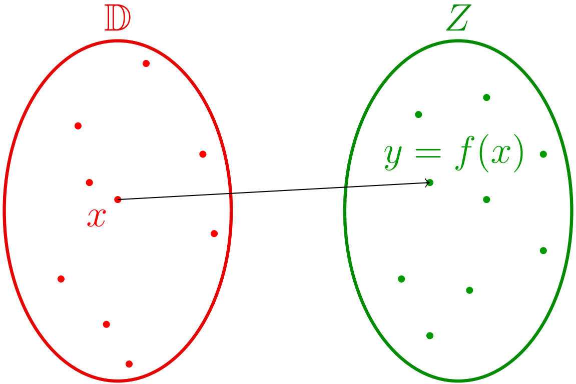


Was ist eine Funktion?

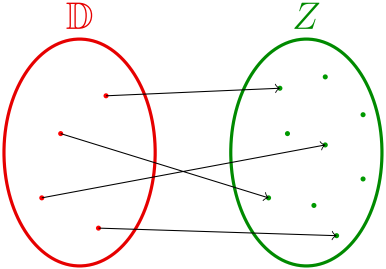
Eine *Funktion* ist eine Zuordnung f, die jedem Element x einer ersten Menge $\mathbb{D}$ (die *Definitionsmenge* oder die *Inputmenge*) irgendwie (z.B. nach einer bestimmten Regel oder Formel) genau ein Element y oder $f(x)$ einer zweiten Menge Z (der *Zielbereich* oder die *Outputmenge*) zuordnet.

Bemerkung ③: Anstelle der Buchstaben x und y (und f) können durchaus andere (sinnstiftende) Buchstaben verwendet werden, z.B. s und t in der Physik, p und q in der Wirtschaft usw.

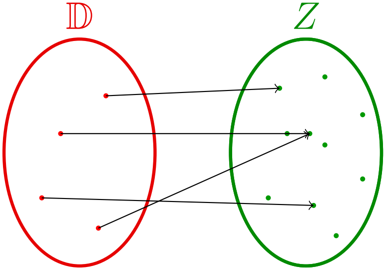
Zwei Veranschaulichungen: Wolken und Maschinen I



Zwei Veranschaulichungen: Wolken und Maschinen I

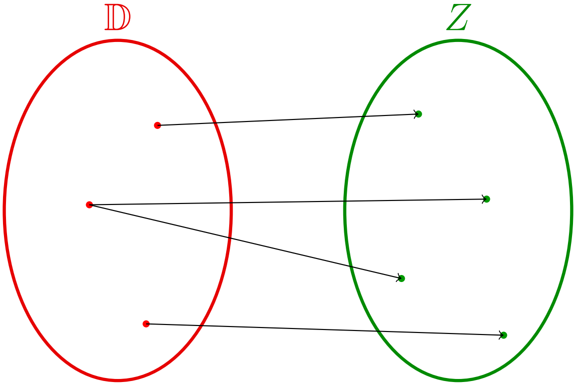


eine Funktion



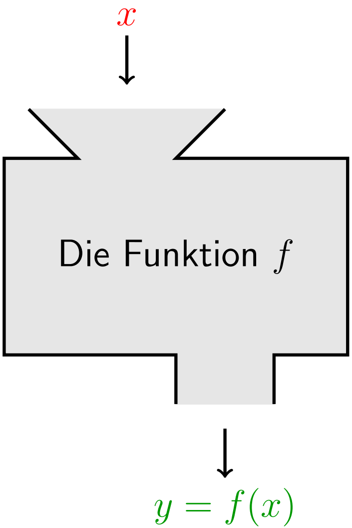
auch eine Funktion

Zwei Veranschaulichungen: Wolken und Maschinen I



keine Funktion

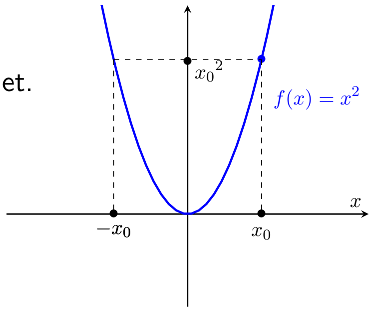
Zwei Veranschaulichungen: Wolken und Maschinen II



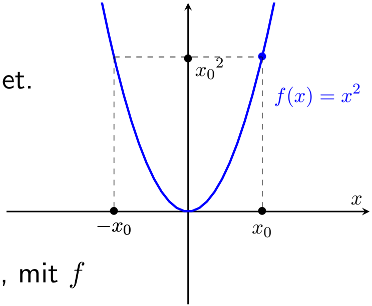
Notationen I

Statt *Funktion* wird auch oft der Begriff *Abbildung* verwendet.

- Unter f wird x auf $f(x)$ *abgebildet*.
- $f(x)$ ist das *Bild* von x unter f.
- $f(x)$ ist der Funktionswert *an der Stelle* x.
- $f(x_0)$ ist der Funktionswert *an der Stelle* x_0.



Notationen I



Statt *Funktion* wird auch oft der Begriff *Abbildung* verwendet.

- Unter f wird x auf $f(x)$ *abgebildet*.
- $f(x)$ ist das *Bild* von x unter f.
- $f(x)$ ist der Funktionswert *an der Stelle* x.
- ⚠ Mit $f(x)$ ist ein Element im Zielbereich Z gemeint, mit f die Funktion selber.

Die Inputvariable x wird oft auch *unabhängige Variable*, die Outputvariable y dagegen *abhängige Variable* genannt.

Ordnet die Funktion f dem Wert x den Wert y zu, so heisst x auch das *Urbild* von y.

Notationen II

Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ heisst auch *Definitionsbereich*, *Domain* oder *Urbildmenge*.

Statt Zielbereich Z hört man auch *Zielmenge* oder *Codomain*.

Nebst dem Zielbereich gibt es auch noch den *Wertebereich* $f(\mathbb{D})$, dies ist die Menge aller Werte, die tatsächlich von der Funktion angenommen werden d.h.

$$f(\mathbb{D}) = \{y \in Z \,|\, \text{existiert ein } x \in \mathbb{D} \text{ mit } f(x) = y\}$$

Statt Wertebereich hört man auch *Wertemenge*, *Bildmenge*, *Image* $\mathrm{Im}(f)$ oder *Range*.

Beispiel

$$\begin{aligned} f\ :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_0^+$

Notation III

Betrachte die *Funktionsgleichung*

$$y = \sin(x) \quad \text{oder} \quad f(x) = \sin(x)$$

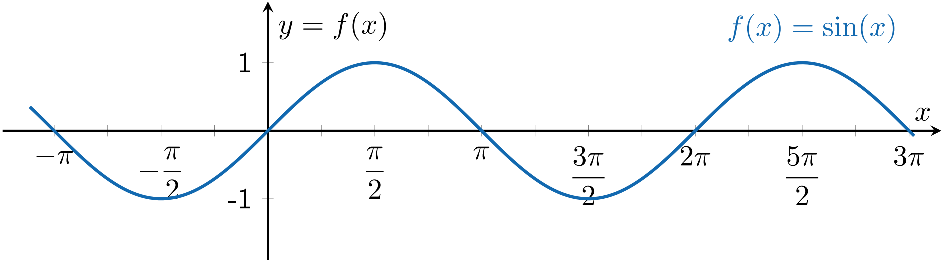
oder auch die *Zuordnungsvorschrift*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

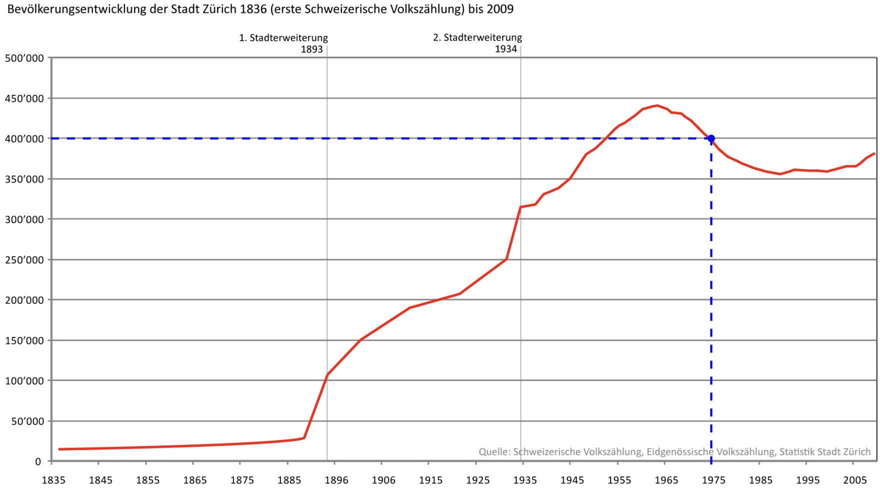
Der Graph einer Funktion

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, so definiert man den *Graph* von f durch

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{D}, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



Der Graph einer Funktion



Quelle: Wikimedia Commons