ETH zürich

Grundlagen

Die Umkehrfunktion

Meike Akveld

Definition

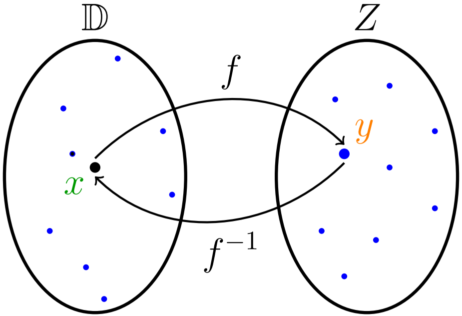
Falls zu einer Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ eine Funktion $g : Z \to \mathbb{D}$ existiert, so dass

$$g(f(x)) = x$$

für alle $x \in \mathbb{D}$ und

$$f(g(y)) = y$$

für alle $y \in Z$, so nennt man g die *Umkehrfunktion* oder *Inverse* der Funktion f. Und man bezeichnet die Umkehrfunktion mit dem Symbol f^{-1}.



$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

⚠ **:** $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$ und $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$ wenn $f(x) \neq 0$.

Umrechnungsformel $\quad {}^\circ C = \frac{5}{9}({}^\circ F - 32)$

$$C = f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$C = f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$^\circ F = \frac{9}{5} {}^\circ C + 32$$

$$C = f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$F = f^{-1}(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

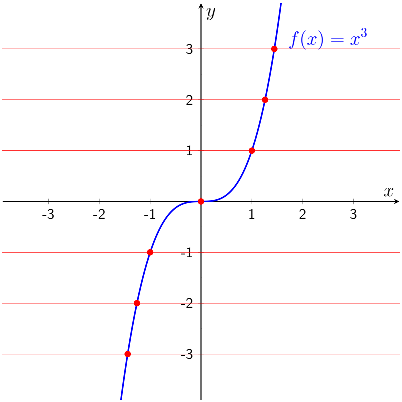
$$f^{-1}(f(F)) = f^{-1}\left(\frac{5}{9}(F - 32)\right) = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(F - 32)\right) + 32 = F - 32 + 32 = F$$

$$C = f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

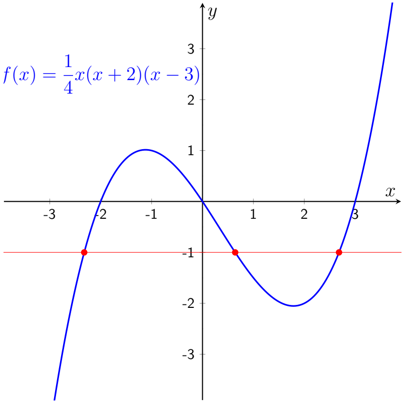
$$F = f^{-1}(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

$$f^{-1}(f(F)) = F \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(C)) = C$$

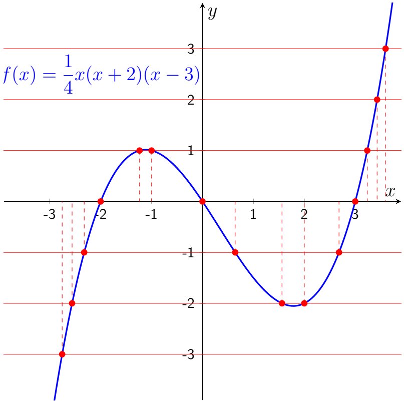
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *injektiv*, wenn für alle $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.



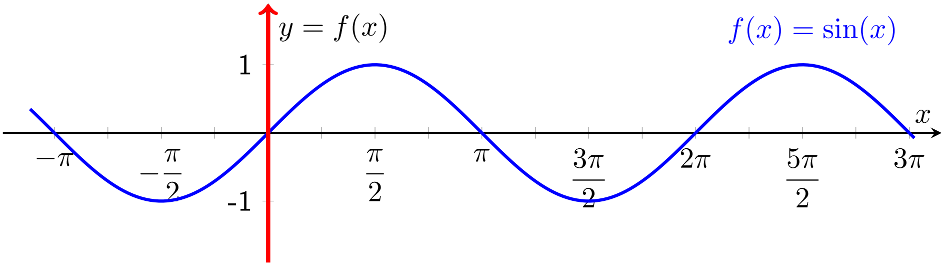
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *injektiv*, wenn für alle $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{D}$ gilt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$.



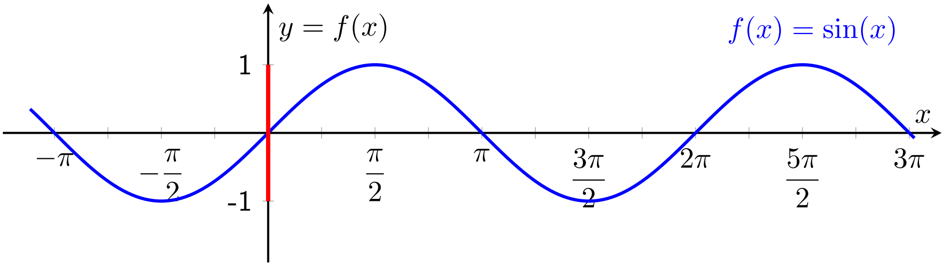
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *surjektiv* wenn für alle $y \in Z$ ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, so dass $f(x) = y$ d.h. $\mathrm{Im(f)} = \mathrm{Z}$.



Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *surjektiv* wenn für alle $y \in Z$ ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, so dass $f(x) = y$ d.h. $\mathrm{Im(f) = Z}$.

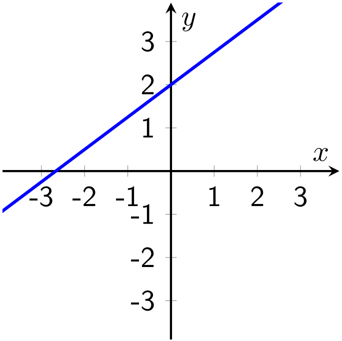


Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *surjektiv* wenn für alle $y \in Z$ ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, so dass $f(x) = y$ d.h. $\mathrm{Im(f)} = \mathrm{Z}$.



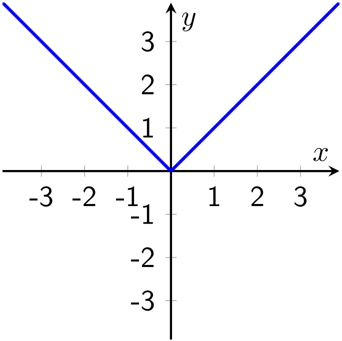
Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ nennt man *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv wie auch surjektiv ist.

Satz: Die Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : Z \to \mathbb{D}$ genau dann, wenn f bijektiv ist.



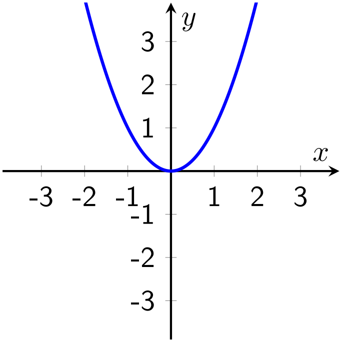
$$f(x) = \frac{3}{4}x + 2$$

Bijektiv, also umkehrbar!



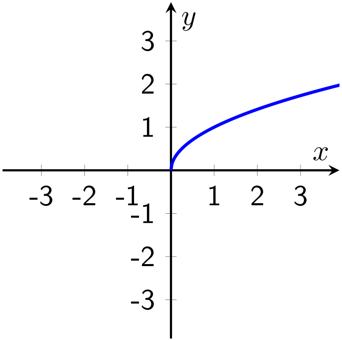
$f(x) = |x|$

Nicht bijektiv!



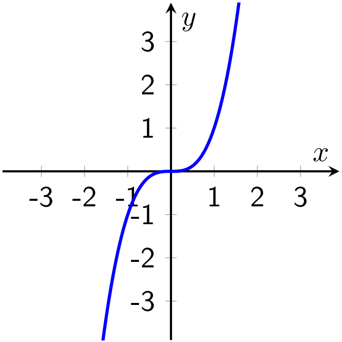
$$f(x) = x^2$$

Nicht bijektiv!



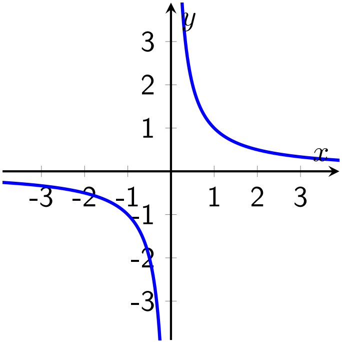
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Bijektiv, also umkehrbar!



$f(x) = x^3$

Bijektiv, also umkehrbar!



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

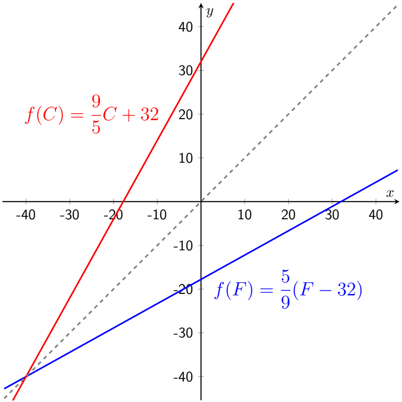
Bijektiv, also umkehrbar!

$$f: y = \frac{2x+3}{x-4}, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}, \quad \mathsf{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

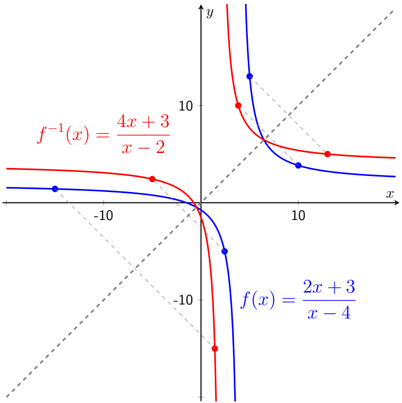
$$\begin{aligned}
y &= \frac{2x+3}{x-4} && \mid \cdot (x-4), x \neq 4 \\
y \cdot (x-4) &= 2x+3 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\
x \cdot y - 4y &= 2x+3 && \mid +4y-2x \\
x \cdot y - 2x &= 4y+3 && \mid \text{faktorisieren} \\
x(y-2) &= 4y+3 && \mid : (y-2), y \neq 2 \\
x &= \frac{4y+3}{y-2}
\end{aligned}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{4\} : x \mapsto y = \frac{4x+3}{x-2}$$

Merke: Die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion bestimmt man oft dadurch, dass man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (und danach die Input-Variable der Umkehrfunktion wieder x nennt).



y
x
40
30
20
10
-10
-20
-30
-40
-40
-30
-20
-10
10
20
30
40
$f(C) = \frac{9}{5}C + 32$
$f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$



$f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x-2}$
$f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$
x
y
10
-10
10
-10

Merke: Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} sind achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.