ETH zürich

Grundlagen

Quadratische Gleichungen

Carina Heiss

Polynomgleichung

$$\text{Term} = 0$$
$$a \cdot x^k$$

Definition:
Eine Gleichung der Art $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$ mit **Koeffizienten** $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heisst **Polynomgleichung n-ten Grades**.

Definition:
Eine Gleichung der Art $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit **Koeffizienten** $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ heisst **Polynomgleichung 2. Grades** oder **quadratische Gleichung**.

Spezialfälle: $b = c = 0$

$$6 \cdot x^2 = 0$$

$$L = \{0\}$$

$$a \cdot x^2 = 0$$

$$L = \{0\}$$

Spezialfälle: $b = 0, c \neq 0$

$$
\begin{aligned}
4 \cdot x^2 - 9 &= 0 && \mid +9 \\
4 \cdot x^2 &= 9 && \mid :4 \\
x^2 &= \frac{9}{4} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} \\
L &= \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \cdot x^2 + c &= 0 && \mid -c \\
a \cdot x^2 &= -c && \mid :a \\
x^2 &= \frac{-c}{a} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ falls } \frac{-c}{a} > 0
\end{aligned}
$$

Spezialfälle: $b \neq 0, c = 0$

$$\begin{aligned}
3 \cdot x^2 - 6 \cdot x &= 0 \\
x \cdot (3 \cdot x - 6) &= 0 \\
x = 0 \vee 3 \cdot x - 6 &= 0 \\
x = 0 \vee 3 \cdot x &= 6 \\
x = 0 \vee x &= 2 \\
L &= \{0, 2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \cdot x^2 + b \cdot x &= 0 \\
x \cdot (a \cdot x + b) &= 0 \\
x = 0 \vee a \cdot x + b &= 0 \\
x = 0 \vee a \cdot x &= -b \\
x = 0 \vee x &= \frac{-b}{a} \\
L &= \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}
\end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen

$$x^2 + 4 \cdot x - 12 = 0$$
$$x^2 + 4 \cdot x = 12$$
$$x^2 + 4 \cdot x + 4 = 12 + 4$$
$$(x+2)^2 = 16$$
$$x + 2 = \pm 4$$
$$x + 2 = -4 \vee x + 2 = 4$$
$$x = -6 \vee x = 2$$
$$L = \{-6, 2\}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$x^2 + 4 \cdot x + 4 = (x+2)^2$$

Allgemeine Auflösungsformel

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad \Big| : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Big| - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a} \qquad \Big| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Allgemeine Auflösungsformel - Teil 2

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die p-q-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\frac{b}{a} = p \qquad \frac{c}{a} = q$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \cdot p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot p\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Diskriminante und die Anzahl reeller Lösungen

$$2x^2 - 14x - 36 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2, b = -14, c = -36$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 288}}{4}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{484}}{4}$$

$$x = \frac{14 \pm 22}{4}$$

$$x = 9 \vee x = -2$$

$$L = \{-2, 9\}$$

Die Diskriminante und die Anzahl reeller Lösungen

$1x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1, b = -2, c = 1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = 1$$

$$L = \{1\}$$

Die Diskriminante und die Anzahl reeller Lösungen

$9x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 9, b = 3, c = 1$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{18}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{18}$$

$$L = \{\}$$

Die Diskriminante und die Anzahl reeller Lösungen

Definition:
Bei einer quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ $(a \neq 0)$ wird der Term
$D := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ **Diskriminante** genannt.
Und es gilt:
$D > 0 \Rightarrow$ Die Gleichung besitzt zwei reelle Lösungen:
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0 \Rightarrow$ Die Gleichung besitzt eine reelle (Doppel-)Lösung: $x = \dfrac{-b}{2a}$
$D < 0 \Rightarrow$ Die Gleichung besitzt keine reelle Lösung.