Grundlagen

Ungleichungen

Carina Heiss

Was ist eine Ungleichung?

Gleichung	**Ungleichung**
$=$	$< \; > \; \leq \; \geq$

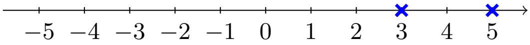
$$t + 1 > t$$
$$L = \mathbb{R}$$

$$t > t + 1$$
$$L = \{\}$$

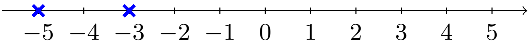
Wie löse ich eine Ungleichung?

$$3 < 5 \quad | \cdot (-1)$$
$$\cancel{-3 < -5}$$

$3 < 5$



$-5 < -3$

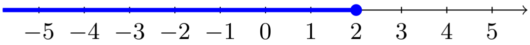


Bei *Multiplikation* oder *Division* mit einer *negativen reellen Zahl* kehrt sich das Vergleichszeichen (Relationszeichen) um.

Lineare Ungleichungen - Beispiel 1

$$
\begin{aligned}
2 - 5x &\geq x - 10 & &\mid -x \\
2 - 6x &\geq -10 & &\mid -2 \\
-6x &\geq -12 & &\mid :(-6) \\
x &\leq 2
\end{aligned}
$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\} =]-\infty, 2] = (-\infty, 2]$$



Lineare Ungleichungen - Beispiel 2

Zwei lineare Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = -2x + 5$ sind gegeben. Für welche x sind die Funktionswerte von f kleiner als die Funktionswerte von g?

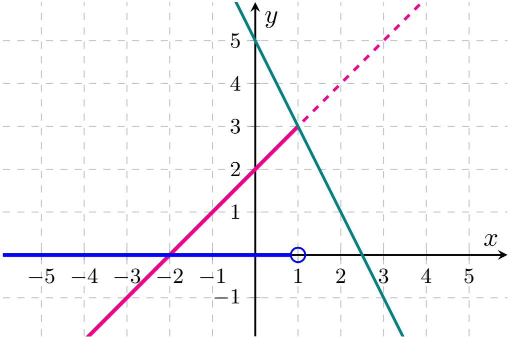
$$
\begin{aligned}
f(x) &< g(x) & & \\
x + 2 &< -2x + 5 & & \mid +2x \\
3x + 2 &< 5 & & \mid -2 \\
3x &< 3 & & \mid :3 \\
x &< 1 & &
\end{aligned}
$$

$$L = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\} =]-\infty, 1[$$

Lineare Ungleichungen - Beispiel 2

Zwei lineare Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = -2x + 5$ sind gegeben. Für welche x sind die Funktionswerte von f kleiner als die Funktionswerte von g?

$$f(x) < g(x)$$
$$x + 2 < -2x + 5$$



Bruchungleichungen

$$\frac{x-1}{x+2} > 2$$

$$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

1. Fall $x+2>0$ d.h. $x>-2$

$$\frac{x-1}{x+2} > 2 \qquad | \cdot (x+2)$$

$$x-1 > 2\cdot(x+2)$$

$$x-1 > 2x+4 \qquad |-x \quad |-4$$

$$-5 > x$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > -2 \wedge x < -5\} = \{\}$$

2. Fall $x+2<0$ d.h. $x<-2$

$$\frac{x-1}{x+2} > 2 \qquad | \cdot \color{red}{(x+2)}$$

$$x-1 \color{red}{<} 2\cdot(x+2)$$

$$x-1 < 2x+4 \qquad |-x \quad |-4$$

$$-5 < x$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \{x \in \mathbb{R} | x < -2 \wedge x > -5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < -2\} \\ &=]-5,-2[\end{aligned}$$

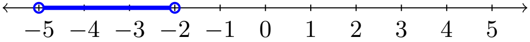
$$L = L_1 \cup L_2 =]-5,-2[$$

Bruchungleichungen

$$\frac{x-1}{x+2} > 2$$

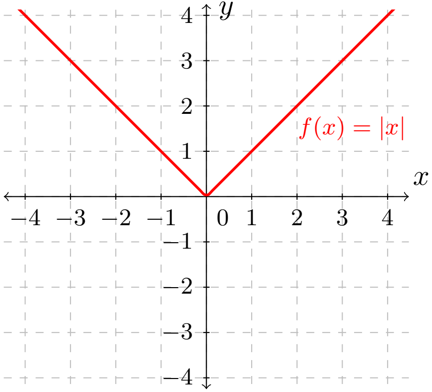
$$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$L = L_1 \cup L_2 =]-5, -2[$$



Was ist denn der (Absolut-)Betrag?

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



Betragsungleichungen - Beispiel 1

$$|3x-2| < 4$$

1. Fall $3x-2 \geq 0$, d.h. $x \geq \dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 3x-2 &< 4 && \mid +2 \\ 3x &< 6 && \mid :3 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$L_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2}{3} \leq x < 2 \right\}$$

2. Fall $3x-2 < 0$, d.h. $x < \dfrac{2}{3}$

$$|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$$

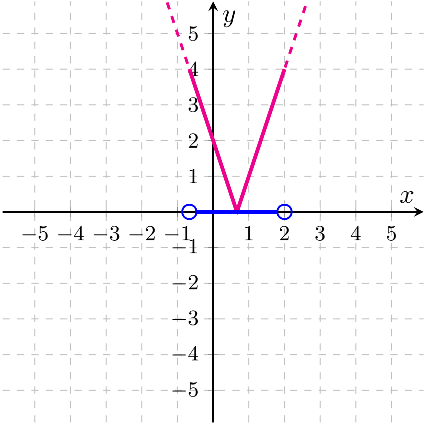
$$\begin{aligned} -3x+2 &< 4 && \mid -2 \\ -3x &< 2 && \mid :(-3) \\ x &> -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3} \right\}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{3} < x < 2 \right\} = \left] -\frac{2}{3}, 2 \right[$$

Betragsungleichungen - Beispiel 1

$$|3x-2|<4$$



$$L = L_1 \cup L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{2}{3} < x < 2 \right\} = \left] -\frac{2}{3}, 2 \right[$$

Betragsungleichungen - Beispiel 2

$$|2x-6| \geq 4$$

1. Fall $2x-6 \geq 0$, d.h. $x \geq 3$

$$\begin{aligned} 2x-6 &\geq 4 && \mid +6 \\ 2x &\geq 10 && \mid :2 \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 5\}$$

2. Fall $2x-6 < 0$, d.h. $x < 3$

$$|2x-6| = -(2x-6) = -2x+6$$

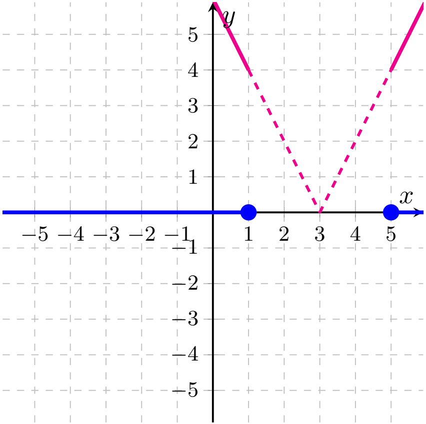
$$\begin{aligned} -2x+6 &\geq 4 && \mid -6 \\ -2x &\geq -2 && \mid :(-2) \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$$

$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1 \vee x \geq 5\} = \left]-\infty, 1\right] \cup \left[5, \infty\right[$$

Betragsungleichungen - Beispiel 2

$$|2x-6| \geq 4$$



$$L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1 \vee x \geq 5\} =]-\infty, 1] \cup [5, \infty[$$

Quadratische Ungleichungen - Beispiel 1

$x^2 - x - 6 > 0$

Zerlegen in Linearfaktoren: $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

1. Fall

$$x + 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0$$
$$x > -2 \quad \wedge \quad x > 3$$

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\} =]3, \infty[$$

2. Fall

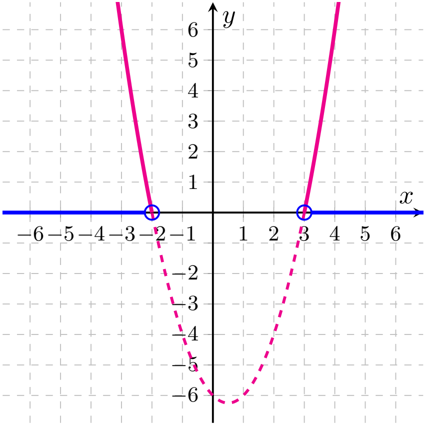
$$x + 2 < 0 \quad \wedge \quad x - 3 < 0$$
$$x < -2 \quad \wedge \quad x < 3$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} | x < -2\} =]-\infty, -2[$$

$$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -2[\cup]3, \infty[$$

Quadratische Ungleichungen - Beispiel 1

$$x^2 - x - 6 > 0$$



$$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -2[\cup]8, \infty[$$

Quadratische Ungleichungen - Beispiel 2

$x^2 - 3x - 4 < 0$

Zerlegen in Linearfaktoren: $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

1. Fall

$$x - 4 > 0 \quad \wedge \quad x + 1 < 0$$

$$x > 4 \quad \wedge \quad x < -1$$

$$L_1 = \{\}$$

2. Fall

$$x - 4 < 0 \quad \wedge \quad x + 1 > 0$$

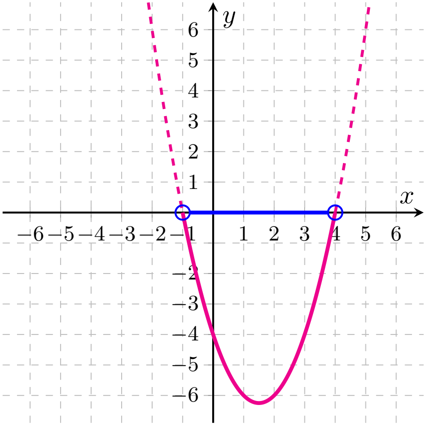
$$x < 4 \quad \wedge \quad x > -1$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\} =]-1, 4[$$

$$L = L_1 \cup L_2 = L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\} =]-1, 4[$$

Quadratische Ungleichungen - Beispiel 2

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$



$$L = L_1 \cup L_2 = L_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\} =]-1, 4[$$