



# Grundlagen

## Lineare Gleichungssysteme

Carina Heiss

## Einleitendes Beispiel

Für ein Experiment benötigen wir 45%-ige Schwefelsäure ( $H_2SO_4$ ). Zur Verfügung stehen aber nur konzentrierte Schwefelsäure (96%-ig) und Batteriesäure (38%-ig). Wie können wir daraus 5ℓ der gesuchten 45%-igen Schwefelsäure herstellen ?



$x$ ...38%-ige  $H_2SO_4$  in ℓ

$y$ ...96%-ige  $H_2SO_4$  in ℓ

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & x + y = 5 \\ \text{II.} & 0.38x + 0.96y = 2.25 \end{array}$$

# Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares  $m \times n$  Gleichungssystem (LGS) besteht aus  $m$  linearen Gleichungen mit  $n$  Unbekannten.

Ein  $3 \times 3$  - System:

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 8x + y - z = 1 \\ \text{II.} & -x + 13y + z = 6 \\ \text{III.} & 2x - 8y + z = 9 \end{array}$$

Ein  $2 \times 3$  - System:

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 7x - 3y + z = 1 \\ \text{II.} & -0.5x + y + 2z = 4 \end{array}$$

## Die Lösung eines LGS

Ein lineares  $m \times n$  Gleichungssystem (LGS) zu lösen, bedeutet, alle  $n$ -Tupel zu finden, die, eingesetzt in die  $n$  Unbekannten, alle  $m$  Gleichungen gleichzeitig zu wahren Aussagen werden lassen.

*Anmerkung:* Nicht jedes LGS besitzt eine eindeutige Lösung. Es könnte auch keine Lösung oder unendlich viele Lösungen geben.

## Die Lösung eines LGS

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 3x - 6y - 1.5z = 12 \\ \text{II.} & -2x + 4y + z = -8 \\ \text{III.} & 4x - 8y - 2z = 16 \end{array}$$

$$L = \{(1, -2, 2)\}$$

$$L = \{(4, 1, -4)\}$$

# Lösungsverfahren

- Substitutionsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Additionsmethode bzw.
- Eliminationsmethode
- Grafisches Lösen

## Die Substitutionsmethode

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 8x + y - z = 1 \\ \text{II.} & -x + 13y + z = 6 \\ \text{III.} & 2x - 8y + z = 9 \end{array}$$

$$\text{I.} : 8x + y - z = 1 \iff z = 8x + y - 1$$

$$\begin{array}{l|l} \text{II'.} & -x + 13y + (8x + y - 1) = 6 \\ \text{III'.} & 2x - 8y + (8x + y - 1) = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{II'.} & 7x + 14y = 7 \\ \text{III'.} & 10x - 7y = 10 \end{array}$$

$$\text{II'.} : 7x + 14y = 7 \iff x = 1 - 2y$$

$$\text{III''.} | 10(1 - 2y) - 7y = 10$$

$$\text{III''.} | 10 - 27y = 10 \iff y = 0$$

$$\begin{array}{l} x = 1 - 2y \iff x = 1 \\ z = 8x + y - 1 \iff z = 7 \end{array}$$

$$L = \{(1, 0, 7)\}$$

## Die Gleichsetzungsmethode

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \left| \begin{array}{l} x + 2y = 14 \\ x - 3y = -11 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} : \begin{array}{l} x + 2y = 14 \iff x = 14 - 2y \\ x = 4 \end{array}$$

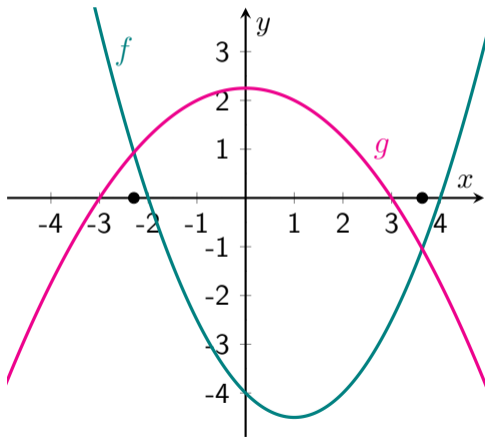
$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} : \begin{array}{l} x + 2y = 14 \iff x = 14 - 2y \\ x - 3y = -11 \iff x = -11 + 3y \end{array}$$

$$L = \{(4, 5)\}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \\ 14 - 2y & = & -11 + 3y \\ 25 & = & 5y \\ 5 & = & y \end{array}$$



## Die Gleichsetzungsmethode



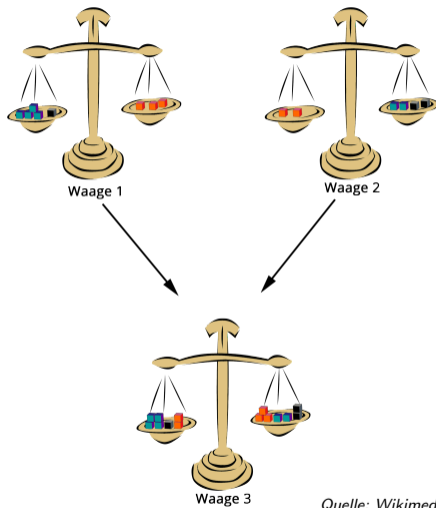
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x + 2y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{array} \right.$$



Quelle: Wikimedia Commons

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \\ \hline \text{I+II.} & 3x = 12 \end{array}$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \\ \hline \text{I+II.} & 3x = 12 \\ & x = 4 \end{array}$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \\ \hline \text{I+II.} & 3x = 12 \\ & x = 4 \end{array}$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \\ \hline \text{I+II.} & 3x = 12 \\ & x = 4 \end{array}$$

$$\text{I. : } 2x + 2y = 5 \iff y = -1.5$$

$$L = \{(4, -1.5)\}$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \quad | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II}'. & -2x + 4y = -14 \\ \hline \text{I+II}'. & 6y = -9 \\ & y = 1.5 \end{array}$$

$$\text{II. : } x - 2y = 7 \iff x = 4$$

## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II.} & x - 2y = 7 \quad | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & 2x + 2y = 5 \\ \text{II}'. & -2x + 4y = -14 \\ \hline \text{I+II}'. & 6y = -9 \\ & y = 1.5 \end{array}$$

$$\text{II. : } x - 2y = 7 \iff x = 4$$

$$L = \{(4, 1.5)\}$$



## Das Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|l}
 \text{I.} & 2x + 3y - 4z = -5 \\
 \text{II.} & 3x - 5y + 2z = 4 \\
 \text{III.} & 4x + y - 2z = 5 \\
 \hline
 \text{II.} + \text{III.} & 7x - 4y = 9 = \text{IV}
 \end{array}$$

$$\text{II}' \mid 6x - 10y + 4z = 8$$

$$\text{I.} + \text{II}' \mid 8x - 7y = 3 = \text{V}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{IV.} & 7x - 4y = 9 \quad | \cdot 7 \\
 \text{V.} & 8x - 7y = 3 \quad | \cdot (-4) \\
 \hline
 7 \cdot \text{IV.} & 49x - 28y = 63 \\
 -4 \cdot \text{V.} & -32x + 28y = -12 \\
 \hline
 & 17x = 51 \\
 & x = 3
 \end{array}$$

$$\text{V.} : 8x - 7y = 3 \iff y = 3$$

$$\text{III.} : 4x + y - 2z = 5 \iff z = 5$$

$$L = \{(3, 3, 5)\}$$

## Einleitendes Beispiel

Für ein Experiment benötigen wir 45%-ige Schwefelsäure ( $H_2SO_4$ ). Zur Verfügung stehen aber nur konzentrierte Schwefelsäure (96%-ig) und Batteriesäure (38%-ig). Wie können wir daraus 5ℓ der gesuchten 45%-igen Schwefelsäure herstellen ?



$x$ ...38%-ige  $H_2SO_4$  in ℓ

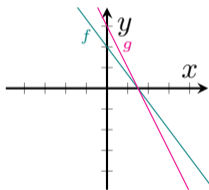
$y$ ...96%-ige  $H_2SO_4$  in ℓ

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} & x + y = 5 \\ \text{II.} & 0.38x + 0.96y = 2.25 \end{array}$$

**Lösung:** Es werden etwa 4.397 ℓ 38%-ige Schwefelsäure und etwa 0.603 ℓ 96%-ige Schwefelsäure benötigt.

Anzahl der Lösungen und grafische Interpretation  $2 \times 2$ **schneidend**

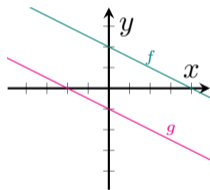
$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad | \quad 4x + 3y = 6 \\ \text{II.} \quad | \quad 2x + y = 3 \end{array}$$



eindeutige Lösung -  
Schnittpunkt

**parallel**

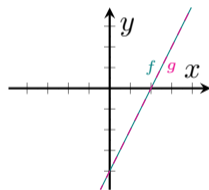
$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad | \quad x + 2y = 4 \\ \text{II.} \quad | \quad 2x + 4y = -4 \end{array}$$



keine Lösung

**zusammenfallend**

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad | \quad 2x - y = 4 \\ \text{II.} \quad | \quad 4x - 2y = 8 \end{array}$$



unendlich viele Lösungen

## Grafische Interpretation

<b>Anzahl Gleichungen</b>	<b>Anzahl Unbekannte</b>	<b>grafische Interpretation</b>
2	2	2 Geraden in der Ebene
3	2	3 Geraden in der Ebene
2	3	2 Ebenen im Raum
3	3	3 Ebenen im Raum

# Grafische Interpretation

