Integralrechnung

Definition des bestimmten Integrals

Simon Knellwolf

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion mit Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$ und Wertemenge $W_f \subset \mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, und so dass $[a, b] \subset D_f$.

Dann ist das *bestimmte Integral* der Funktion f von a bis b definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x \right),$$

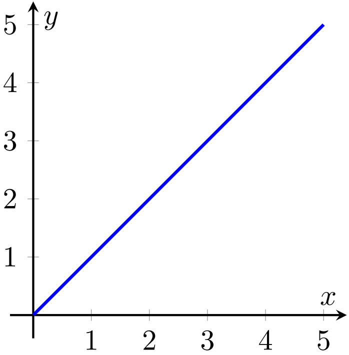
wobei $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und die Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ das Intervall $[a, b]$ so in n Teilintervalle teilen, dass $x_0 = a$ und $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ für alle $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Man nennt a und b die *Integrationsgrenzen* und $f(x)$ den *Integranden*.

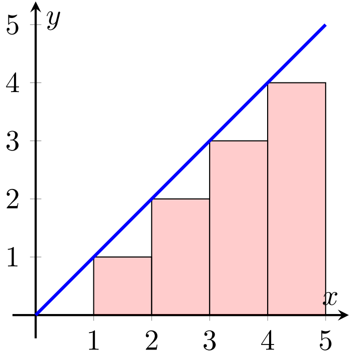
Beispiel

Es sei f definiert durch $f(x) = x$. Was ist $\int_0^5 f(x)dx$?

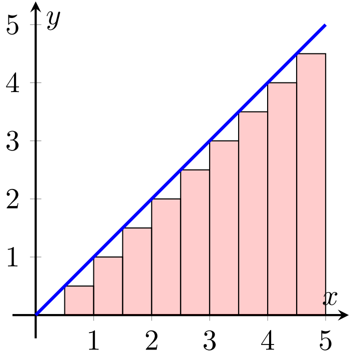
Beispiel – geometrisch interpretiert



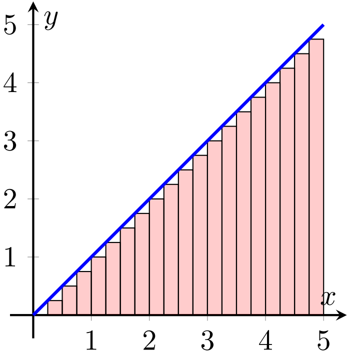
Beispiel – geometrisch interpretiert



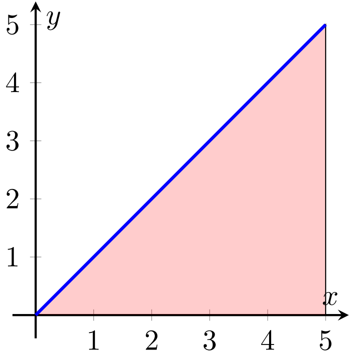
Beispiel – geometrisch interpretiert



Beispiel – geometrisch interpretiert



Beispiel – geometrisch interpretiert



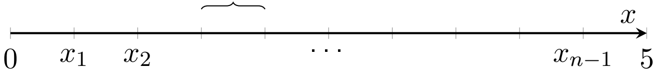
n	Summe der Flächen
5	10.0000
10	11.2500
20	11.8750
100	12.3750
1000	12.4875
"∞"	12.5000

Beispiel – von Hand berechnet

$$\int_0^5 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\cdot\frac{5}{n}\cdot\frac{5}{n}\right)$$

$$\Delta x = \frac{5}{n} \qquad x_i = i\cdot\frac{5}{n}$$



Beispiel – von Hand berechnet

$$\int_0^5 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\Delta x\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\cdot\frac{5}{n}\cdot\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^2}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{25}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}$$
$$= \frac{25}{2}\cdot 1 = 12.5$$