ETH zürich

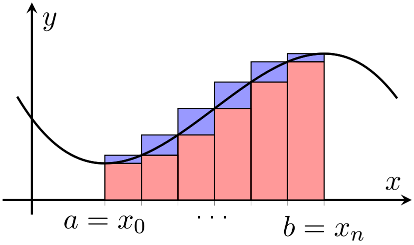
Integralrechnung

Eine geometrische Interpretation

Simon Knellwolf

Das bestimmte Integral als Fläche

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a,b]$ *positive* und *monoton wachsende* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

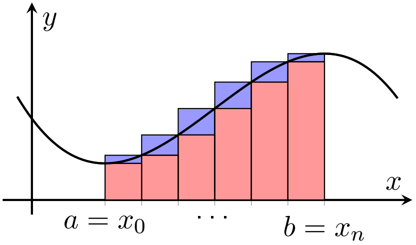


$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \le A \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$0 \le A - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \le f(x_n)\Delta x - f(x_0)\Delta x$$

Das bestimmte Integral als Fläche

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a,b]$ *positive* und *monoton wachsende* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

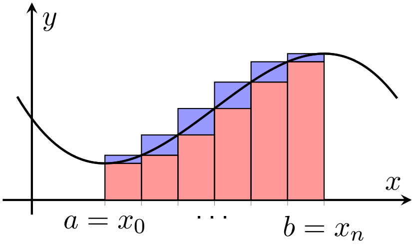


$$\color{red}{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x} \leq A \leq \color{blue}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

$$0 \leq A - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq \big(f(b) - f(a)\big)\Delta x$$

Das bestimmte Integral als Fläche

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a, b]$ *positive* und *monoton wachsende* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

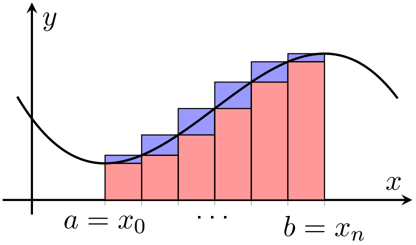


$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$0 \leq A - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq 0$$

Das bestimmte Integral als Fläche

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a, b]$ *positive* und *monoton wachsende* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

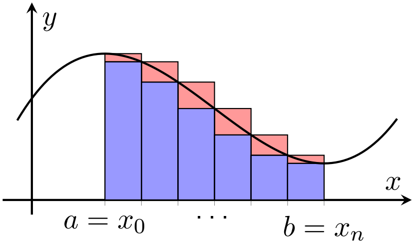


$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Das bestimmte Integral als Fläche

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a, b]$ *positive* und *monoton fallende* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

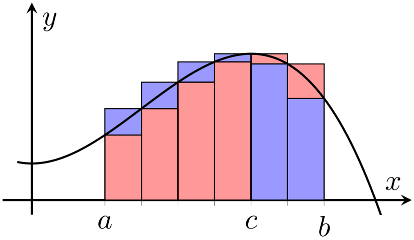


$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \geq A \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Das bestimmte Integral als Fläche

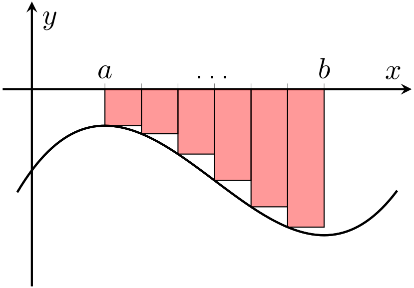
Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a, b]$ *positive* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.



$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Wann ist das bestimmte Integral denn keine Fläche?

Sei f eine stetige und auf dem Intervall $[a, b]$ *negative* Funktion, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

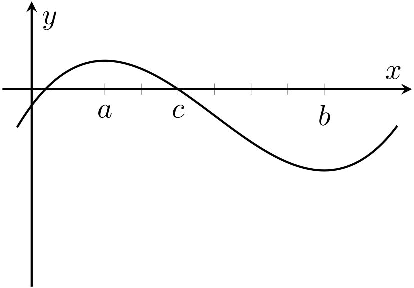


$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \text{ ist eine negative Zahl}$$

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

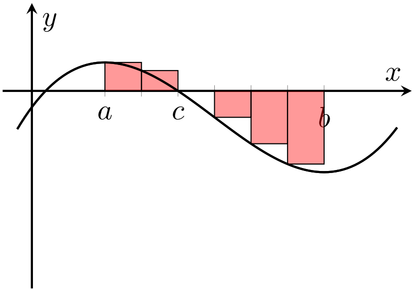
Wann ist das bestimmte Integral denn keine Fläche?

Sei f eine stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ negative *und* positive Werte annimmt, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.



Wann ist das bestimmte Integral denn keine Fläche?

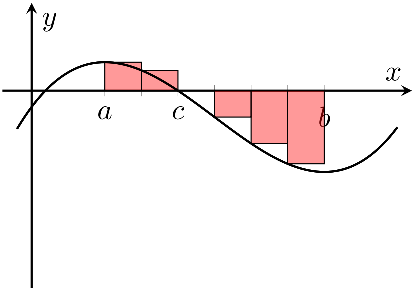
Sei f eine stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ negative *und* positive Werte annimmt, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.



$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$, Summanden haben Vorzeichen $+/-$

Wann ist das bestimmte Integral denn keine Fläche?

Sei f eine stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ negative *und* positive Werte annimmt, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ und $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.



$\int_a^b f(x)dx$ ist eine „Flächenbilanz“

$$A = \int_a^c f(x)dx + \left(-\int_c^b f(x)dx\right)$$

Ein Standardbeispiel

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = 4$$