ETH zürich

Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Simon Knellwolf

Stammfunktionen

Es sei $f : D \to W$ eine stetige, reelle Funktion.

Eine Funktion F heisst *Stammfunktion* von f, wenn F dieselbe Definitionsmenge hat wie f und wenn $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Bemerkungen:

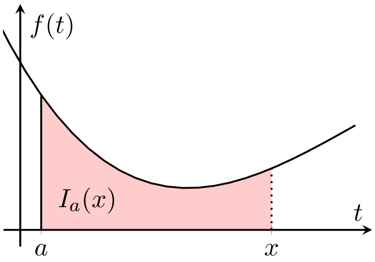
- Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch die Funktion definiert durch $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f.
- Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen derselben Funktion f, dann gilt $F_1(x) = F_2(x) + C$ für eine geeignete Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Die Integralfunktion

Es sei $f : D \to W$ eine stetige, reelle Funktion und $a \in D$.

Die *Integralfunktion* von f zur unteren Grenze a ist definiert durch

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt.$$



Die Integralfunktion

Es sei $f : D \to W$ eine stetige, reelle Funktion und $a \in D$.

Die *Integralfunktion* von f zur unteren Grenze a ist definiert durch

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integralfunktion I_a ist eine Stammfunktion von f (für alle $a \in D$).

Bestimmte Integrale berechnen

Es sei $f : D \to W$ eine stetige, reelle Funktion.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = I_c(b) - I_c(a)$$

Der Hauptsatz sagt: I_c ist eine Stammfunktion von f.

Ist F ebenfalls eine Stammfunktion, gilt $I_c(x) = F(x) + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Es gilt also:

$$\int_a^b f(x)dx = I_c(b) - I_c(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

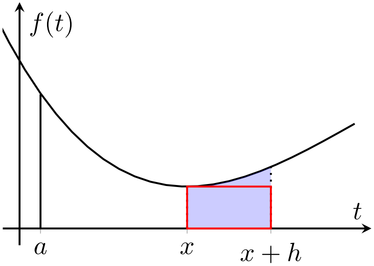
Bestimmte Integrale berechnen

Algorithmus zur Berechnung von $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$:

1) Finde eine Stammfunktion F von f.
2) Berechne $F(b) - F(a)$.

Notationen für $F(b) - F(a)$: $\quad F(x)\Big|_a^b$ oder $\big[F(x)\big]_a^b$.

Beweis des Hauptsatzes

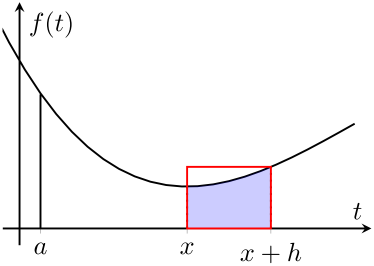


Es ist zu zeigen, dass $I_a' = f$.

$$I_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$$

Seien $x_1, x_2 \in [x, x+h]$, so dass $f(x_1)$ ein Minimum und $f(x_2)$ ein Maximum ist.

Beweis des Hauptsatzes

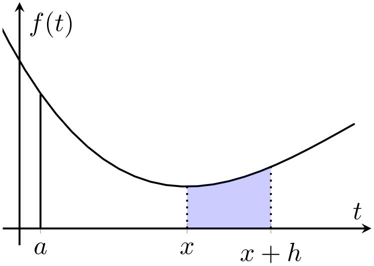


Es ist zu zeigen, dass $I_a' = f$.

$$I_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$$

Seien $x_1, x_2 \in [x, x+h]$, so dass $f(x_1)$ ein Minimum und $f(x_2)$ ein Maximum ist.

Beweis des Hauptsatzes



Es ist zu zeigen, dass $I_a' = f$.

$$I_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h}$$

Seien $x_1, x_2 \in [x, x+h]$, so dass $f(x_1)$ ein Minimum und $f(x_2)$ ein Maximum ist.

Dann gilt:

$$f(x_1) \leq \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \leq f(x_2).$$

Für $h \to 0$:
$$f(x) \leq I_a'(x) \leq f(x).$$