ETH zürich

Integralrechnung

Partielle Integration

Simon Knellwolf

Produkte integrieren – wie es nicht geht!

Das Integral eines Produkts ist *nicht* das Produkt der Integrale.

Beispiel:

$$\int x \cdot \cos(x)dx \neq \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin(x) + C$$

Ableiten der rechten Seite:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin(x) + C\right)' = x \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos(x)$$

Partielle Integration

Produktregel für die Ableitung:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Daraus folgt:

$$\int {\color{red} f'(x) \cdot g(x)} dx = (f \cdot g)(x) - \int {\color{blue} f(x) \cdot g'(x)} dx + C$$

Partielle Integration

Produktregel für die Ableitung:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Daraus folgt:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = \big(f \cdot g\big)(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx + C$$

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = \big(f \cdot g\big)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Beispiel

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\cos(x)}\,dx = \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\sin(x)} - \int \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\sin(x)}\,dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Die Wahl von f und g war entscheidend. *„Falsche" Wahl:*

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\cos(x)}\,dx = \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\tfrac{1}{2}x^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\cos(x)} - \int \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\tfrac{1}{2}x^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{\big(-\sin(x)\big)}\,dx$$