ETH zürich

Logarithmus

Logarithmengesetze

Carina Heiss

Logarithmusgesetz I

$$B^a \cdot B^b = B^{a+b}$$

Ist B eine beliebige Basis $(B > 0$ und $B \neq 1)$ und sind $a, b > 0$ so gilt:
$\log_B(a \cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b)$

Logarithmusgesetz I - Beweis

Wegen $a, b > 0$:

$$
\begin{aligned}
a &= B^x & \text{und} \qquad b &= B^y \\
x &= \log_B(a) & \text{und} \qquad y &= \log_B(b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_B(a \cdot b) &= \log_B(B^x \cdot B^y) \\
&= \log_B(B^{x+y}) \\
&= x + y \\
&= \log_B(a) + \log_B(b)
\end{aligned}
$$

Logarithmusgesetz I - Verallgemeinerung

Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ so gilt:

$\log_B(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n) = \log_B(a_1) + \log_B(a_2) + ... + \log_B(a_n)$

Logarithmusgesetz II

$$\frac{B^x}{B^y} = B^{x-y}$$

Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und sind $a, b > 0$ so gilt:
$\log_B \left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$

Logarithmusgesetz III

$$(B^x)^r = B^{x \cdot r}$$

Ist B eine beliebige Basis ($B > 0$ und $B \neq 1$) und ist $a > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt:

$$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a)$$

Logarithmusgesetz III - Beweis

Wegen $a > 0$:

$$a = B^x$$
$$x = \log_B(a)$$

$$\begin{aligned}
\log_B(a^r) &= \log_B((B^x)^r) \\
&= \log_B(B^{x \cdot r}) \\
&= x \cdot r \\
&= \log_B(a) \cdot r = r \cdot \log_B(a)
\end{aligned}$$

Lösen von Exponentialgleichungen

$$10^{x+3} = 4^{2x}$$

$$\log(10^{x+3}) = \log(4^{2x})$$

$$(x+3) \cdot \log(10) = 2x \cdot \log(4)$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 2x \cdot \log(4)$$

$$\Leftrightarrow x - 2x \cdot \log(4) = -3$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (1 - 2 \cdot \log(4)) = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{1 - 2 \cdot \log(4)} \approx 14.697$$

Basisumrechnung

$$\log_3(12) = ?$$

$$x := \log_3(12) \Leftrightarrow 3^x = 12$$

$$\log(3^x) = \log(12)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \log(3) = \log(12)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(12)}{\log(3)}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(12) = \frac{\log(12)}{\log(3)}$$

Basisumrechnung

$$\boxed{\log_U(a) = \frac{\log(a)}{\log(U)} = \frac{\mathrm{lb}(a)}{\mathrm{lb}(U)} = \ldots = \frac{\log_B(a)}{\log_B(U)}}$$