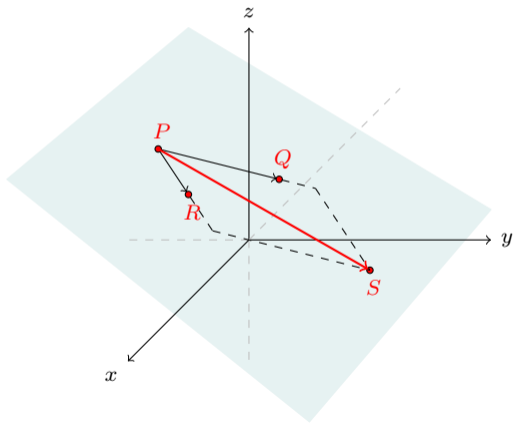




Vektorgeometrie

Ebenen

Meike Akveld

Ebenen in \mathbb{R}^3 

Und somit gibt es reelle Zahlen t und s so dass gilt

$$\vec{OS} = \vec{OP} + s \cdot \vec{PQ} + t \cdot \vec{PR}$$

Parameterdarstellung einer Ebene

Seien P, Q und R drei Punkte im \mathbb{R}^3 , die nicht auf einer Geraden liegen, und sei E die Ebene durch diese drei Punkte. So ist die Gleichung

$$E : \vec{r} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} + t \cdot \overrightarrow{PR} \quad \text{für } s, t \in \mathbb{R}$$

die *Parametergleichung* oder die *Parameterdarstellung* der Ebene E . Sie liefert die Menge aller Ortsvektoren \vec{r} zu Punkten der Ebene E .

Bemerkung: Weder der Ortsvektor \overrightarrow{OP} noch die Richtungsvektoren \overrightarrow{PQ} und \overrightarrow{PR} sind eindeutig in der Parameterdarstellung der Ebene.

Koordinatengleichung einer Ebene

Die Parameterdarstellung der Ebene ist auch äquivalent zu folgenden *Komponentengleichungen*

$$\begin{aligned}x &= OP_x + s \cdot PQ_x + t \cdot PR_x \\y &= OP_y + s \cdot PQ_y + t \cdot PR_y \\z &= OP_z + s \cdot PQ_z + t \cdot PR_z\end{aligned}$$

wobei mit OP_x die x -Komponente des Vektors \overrightarrow{OP} gemeint ist usw.

So erhalten wir die sogenannte *Koordinatengleichung*

$$ax + by + cz + d = 0$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Eine lineare Gleichung der Art

$$ax + by + cz + d = 0$$

hat als Lösungsmenge eine Ebene und heisst *Koordinatengleichung* der Ebene.

FAQs zu Ebenen

- 1) Liegt ein Punkt auf einer Ebene, d.h. $P \in E$?
- 2) Wie bringt man eine Ebene in die jeweils andere Form?
- 3) Wie findet man den allfälligen Schnittpunkt von einer Gerade und einer Ebene, d.h. $g \cap E = \dots$?
- 4) Wie findet man die allfällige Schnittgerade zweier Ebenen, d.h. $E_1 \cap E_2 = \dots$?
- 5) Wie findet man den allfälligen Schnitt dreier Ebenen? Und was ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$?

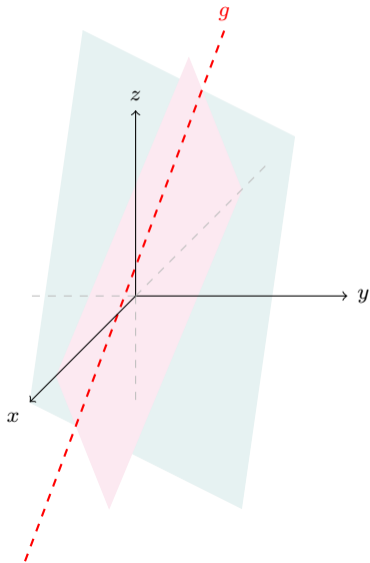
Ein Beispiel:

Bestimme die Schnittgerade g der Ebenen

$E_1 : 2x + y + 3z = 1$ und $E_2 : 3x - y - z = 2$.

$$x = 0 \implies \begin{cases} y + 3z = 1 \\ -y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\frac{7}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\implies P = \left(0, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \in g$$



Ein Beispiel:

$$y = 0 \implies Q = \left(\frac{7}{11}, 0, -\frac{1}{11}\right) \in g.$$

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{35}{22} \end{pmatrix}$$

