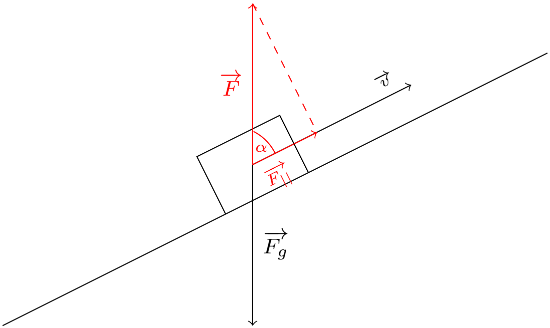
ETH zürich

Vektorgeometrie

Skalarprodukt und Normalvektor

Meike Akveld

Motivierendes Beispiel: Arbeit entlang eines Weges



$$A = \text{Weg mal Kraft} = |\vec{v}||\vec{F}|\cos\alpha$$

Das Skalarprodukt

Für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (oder $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$) definieren wir das *Skalarprodukt* $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ durch

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

wobei α der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist.

Spezialfälle

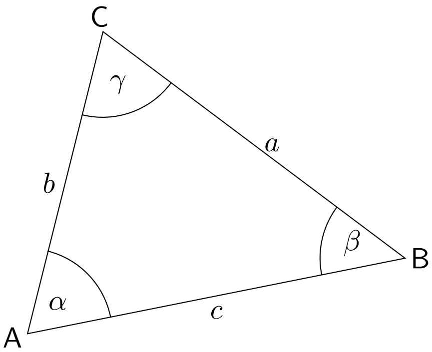
- Sei $0 < \alpha < 90^\circ$ ein spitzer Winkel, so ist $\cos\alpha > 0$ und somit $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.
- Sei $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ein stumpfer Winkel, so ist $\cos\alpha < 0$ und somit $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.
- Sei $\alpha = 0^\circ$, so haben die beide Vektoren diesselbe Richtung, und es gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \underbrace{\cos 0^\circ}_{=1} = |\vec{u}||\vec{v}|$.
- Sei $\alpha = 180^\circ$, so haben die beide Vektoren entgegengesetzte Richtung, und es gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \underbrace{\cos 180^\circ}_{=-1} = -|\vec{u}||\vec{v}|$.
- Sei $\vec{u} = \vec{v}$, so folgt $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}| \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.
- Sei $\alpha = 90^\circ$, so gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} = 0$.

Eine zweite Formel für das Skalarprodukt

Definition des Skalarproduktes

$u \cdot v = |u||v| \cos(\alpha)$

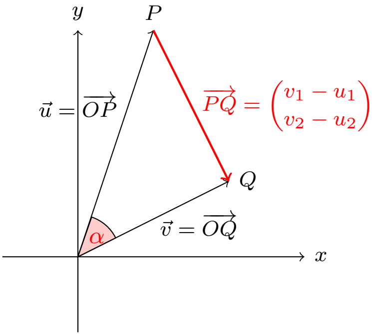
?



Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Eine zweite Formel für das Skalarprodukt



$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,\underbrace{|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha}_{=\vec{u}\cdot\vec{v}}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2}{2} \\ &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}{2} \\ &= \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2}{2} = u_1v_1 + u_2v_2 \end{aligned}$$

Eine zweite Formel für das Skalarprodukt

Seien $\vec{u}, \vec{v}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$), so lässt sich das Skalarprodukt ausrechnen durch

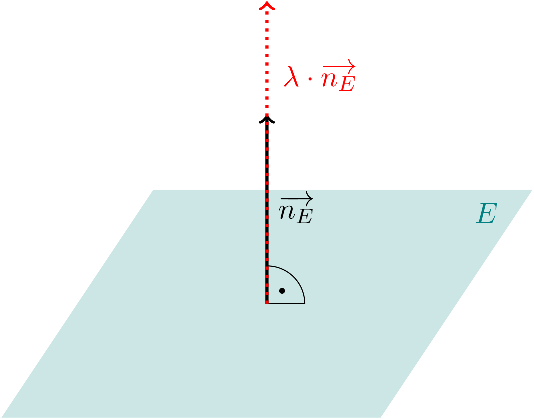
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \ (+u_3 v_3)$$

Orthogonalitätstest

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ein Normalvektor zu einer Ebene

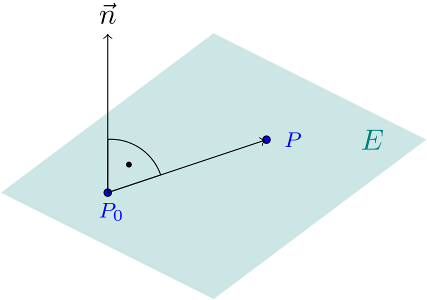
Gegeben eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, so verstehen wir unter einem *Normalvektor* einen Vektor $\vec{n}_E$, der senkrecht auf E steht.



Bestimmung und geometrische Bedeutung eines Normalvektors

Problem: Gegeben eine Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$. Bestimme einen Normalvektor $\vec{n}$ zu E.

Lösung: Sei $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt auf E und $P = (x, y, z)$ ein beliebiger anderer Punkt auf E, so muss gelten $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$, was äquivalent ist zu $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

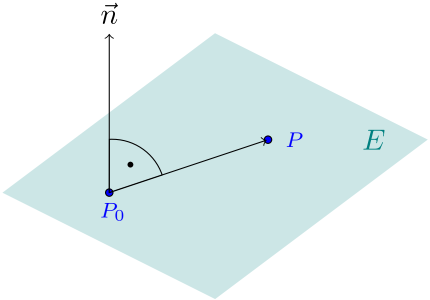


$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Bestimmung und geometrische Bedeutung eines Normalvektors

Problem: Gegeben eine Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$. Bestimme einen Normalvektor $\vec{n}$ zu E.

Lösung: Sei $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt auf E und $P = (x, y, z)$ ein beliebiger anderer Punkt auf E, so muss gelten $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$, was äquivalent ist zu $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

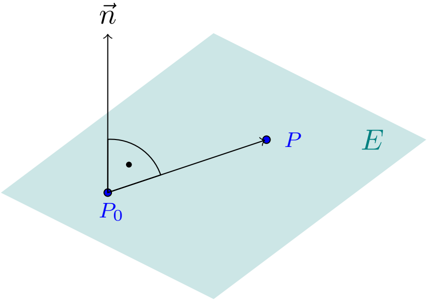


$$n_1x + n_2y + n_3z - \underbrace{(n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0)}_{=k} = 0$$

Bestimmung und geometrische Bedeutung eines Normalvektors

Problem: Gegeben eine Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$. Bestimme einen Normalvektor $\vec{n}$ zu E.

Lösung: Sei $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein fester Punkt auf E und $P = (x, y, z)$ ein beliebiger anderer Punkt auf E, so muss gelten $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$, was äquivalent ist zu $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.



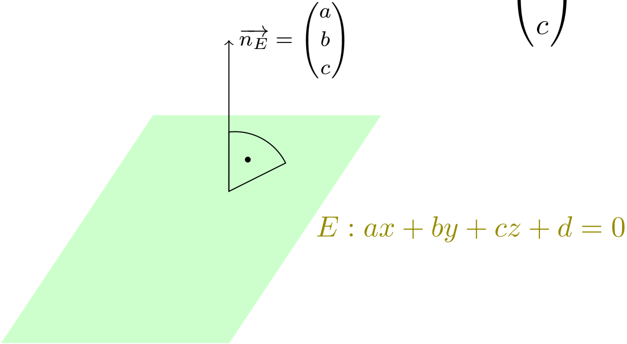
Es gibt eine Zahl $\lambda \neq 0$ mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und gleichzeitig} \quad k = -\lambda d$$

Bestimmung und geometrische Bedeutung eines Normalvektors

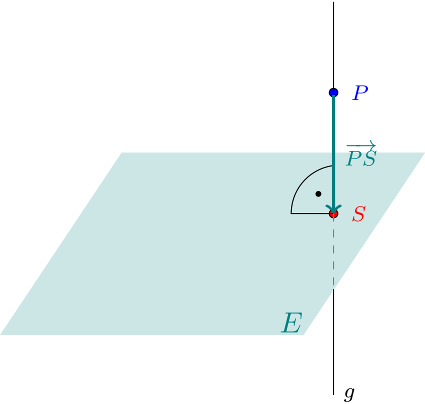
Zusammenfassend: Sei E eine Ebene im Raum mit Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$, so kan man die Koeffizienten a, b und c interpretieren als

Komponenten eines Normalvektors $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



Eine Anwendung: Abstand Punkt – Ebene

Problem: Gegeben eine Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$ und ein Punkt $P = (x_P, y_P, z_P)$. Bestimme den Abstand von P zu E.



Idee:

- Konstruiere eine Hilfsgerade g durch den Punkt P und senkrecht zu der Ebene E.
- Schneide diese Gerade mit der Ebene und bestimme den Schnittpunkt S.
- Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ ist eine senkrechte Verbindung vom Punkt P zu der Ebene und seine Länge $|\overrightarrow{PS}|$ ist der gesuchte Abstand.

Beispiel

Problem: Gegeben die Ebene $E : x - 2y - 2z + 4 = 0$ und der Punkt $P = (5, 1, -1)$. Bestimme den Abstand von P zu E.

Beispiel

Problem: Gegeben die Ebene $E : x - 2y - 2z + 4 = 0$ und der Punkt $P = (5, 1, -1)$. Bestimme den Abstand von P zu E.

Wir brauchen die Gerade g die durch P geht und senkrecht zu E ist, d.h.

$$g : \vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\,\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + t \\ 1 - 2t \\ -1 - 2t \end{pmatrix}$$

Beispiel

Problem: Gegeben die Ebene $E : x - 2y - 2z + 4 = 0$ und der Punkt $P = (5, 1, -1)$. Bestimme den Abstand von P zu E.

$$g \cap E \implies (5 + t) - 2(1 - 2t) - 2(-1 - 2t) + 4 = 0 \implies t = -1$$

Beispiel

Problem: Gegeben die Ebene $E : x - 2y - 2z + 4 = 0$ und der Punkt $P = (5, 1, -1)$. Bestimme den Abstand von P zu E.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + (-1)\,\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 + (-1) \\ 1 - 2(-1) \\ -1 - 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Problem: Gegeben die Ebene $E : x - 2y - 2z + 4 = 0$ und der Punkt $P = (5, 1, -1)$. Bestimme den Abstand von P zu E.

Der gesuchte Abstand ist nun gegeben durch

$$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$