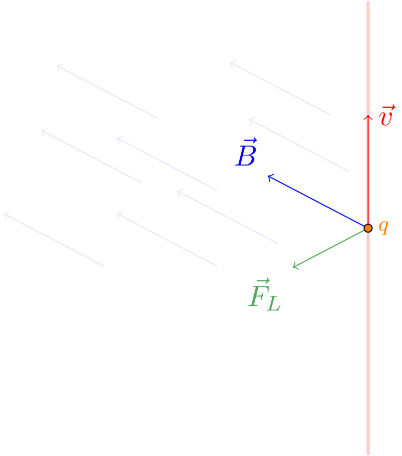
ETH zürich

Vektorgeometrie

Vektorprodukt

Meike Akveld

Motivierendes Beispiel: Die Lorentzkraft

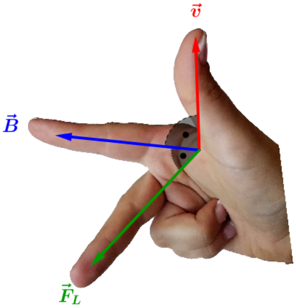


Hendrik Antoon Lorentz

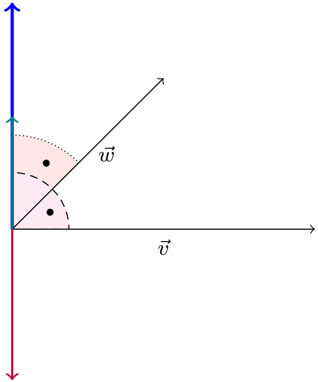
$*$18. Juli 1853

† 4. Februar 1928

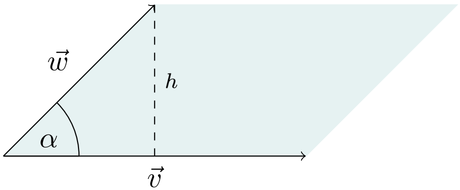
Motivierendes Beispiel: Die Lorentzkraft



Definition des Vektorprodukts: Die Länge



Definition des Vektorprodukts: Die Länge

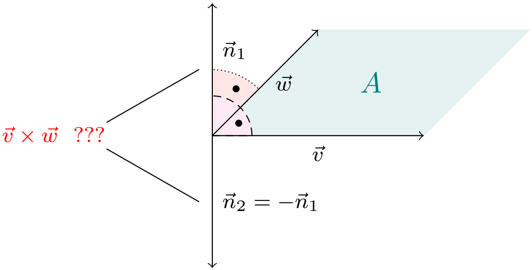


$$A = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha) \;\Rightarrow$$

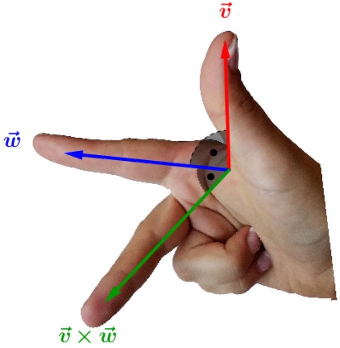
$$\boxed{|v \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin(\alpha)}$$

Bemerkungen:

- Vergleiche diese Formel mit derjenigen vom Skalarprodukt
  $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha$ und
  $\vec{v} \bullet \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$
- Für den Fall $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$, gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$
- Wir haben nun die Definition des Vektorprodukts zurückgebracht zu der Wahl aus zwei Vektoren.



Definition des Vektorprodukts: Die Richtung



Das Vektorprodukt ist *nicht-kommutativ*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Definition des Vektorprodukts

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ so versteht man unter dem *Vektorprodukt* der beiden Vektoren den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

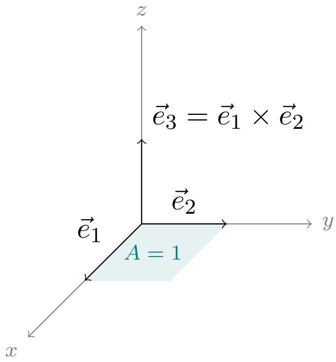
- Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf den beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$.
- Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ entspricht der Masszahl der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Die drei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein *Rechtssystem* und genügen somit der *Rechte-Hand-Regel*.

Beachte: Das Vektorprodukt ist nur definiert für Vektoren in $\mathbb{R}^3$!

Standardbeispiel in $\mathbb{R}^3$

Betrachte die sogenannte *Standardbasis* von $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}, \vec{w} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ impliziert, dass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z & = 0 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z & = 0 \end{cases}$$

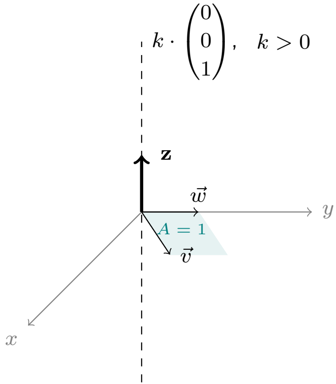
Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aus $x = -y$ und $y = 0$ folgt $\vec{v} \times \vec{w} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für irgendein $k \in \mathbb{R}$

Ein Beispiel durchgerechnet

Bestimme das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Formel für das Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* von zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ lässt sich berechnen durch

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Ebene durch 3 Punkte und Fläche eines Dreiecks

Bestimme die Ebene E durch die drei Punkte $A = (1, -1, 3), B = (2, 1, 3)$ und $C = (4, 1, -3)$ und die Fläche des Dreiecks ΔABC.

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Und somit ist die Ebenengleichung von E

$$-12x + 6y - 4z + 30 = 0$$

Anwendung: Ebene durch 3 Punkte und Fläche eines Dreiecks

Bestimme die Ebene E durch die drei Punkte $A = (1, -1, 3), B = (2, 1, 3)$ und $C = (4, 1, -3)$ und die Fläche des Dreiecks ΔABC.

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + (-4)^2} = 7$$